

Appunti di Meccanica

Lorenzo Monacelli, Mattia Miotto, Christian Durante

17 luglio 2012

Indice

1	Derivate dei vettori	4
1.1	Derivata del versore	4
1.2	Derivata del vettore generico	6
2	Cinematica	7
2.1	Traiettoria	7
2.2	Legge oraria	8
2.3	Velocità e Accelerazione	8
2.3.1	Velocità	8
2.3.2	Accelerazione	9
2.4	Zoologia dei moti	10
2.4.1	Moti rettilinei	11
2.4.2	Moto dei gravi	12
2.5	Trasformazioni	13
2.5.1	Accelerazione e forze apparenti	16
3	La Dinamica	18
3.1	Prime osservazioni sull'azione delle forze	18
3.2	I principi della dinamica	19
3.2.1	Principio d'inerzia	19
3.2.2	Secondo principio	19
3.2.3	Principio di azione-reazione	21
3.3	Momento della quantità di moto	21
3.4	Teorema del momento dell'impulso	22
3.5	Attrito tra corpi rigidi	22
3.6	Forze che dipendono dalla posizione	23
3.6.1	Moto armonico	24
3.7	Forze che dipendono dalla velocità (attriti viscosi)	25
3.7.1	Moto smorzato	25
3.8	Moto armonico smorzato	27
3.8.1	Caso 1: oscillazione smorzata sottocritica	28
3.8.2	Caso 2: oscillazione sovracritica	29
3.8.3	Caso 3: oscillazione con smorzamento critico	30

3.9	Risonanza	30
3.10	Il pendolo	33
3.11	Oscillatori accoppiati	35
4	Il lavoro e l'energia	39
4.1	Lavori delle forze	40
4.1.1	Lavoro della forza elastica	40
4.1.2	Lavoro della forza peso	40
4.2	Teorema delle Forze vive	40
4.3	Forze conservative	41
4.4	La conservazione dell'energia meccanica	44
4.5	Campi di forze centrali	46
5	Gravitazione universale, Leggi di Keplero e orbite planetarie	48
5.1	La Forza di gravità	48
5.2	Il teorema di Gauss	49
5.3	Orbite dei pianeti	52
5.3.1	Problema dei due corpi	52
5.3.2	Dedurre le orbite dal grafico del potenziale efficace	56
5.4	Seconda legge di Keplero	58
5.5	Terza legge di Keplero	59
6	Meccanica dei sistemi	61
6.1	Proprietà del centro di massa	61
6.1.1	Proprietà distributiva	61
6.1.2	Simmetrie	62
6.1.3	Centro di massa di corpi continui	62
6.1.4	Il moto del centro di massa	63
6.2	Urti	65
6.2.1	Urti monodimensionali	66
6.2.2	Urti bidimensionali	67
6.2.3	Risoluzione degli urti nel sistema del centro di massa	69
6.3	Corpi rigidi	71
6.3.1	Rotazioni attorno ad asse fisso e di simmetria	73
6.3.2	Teorema di Huygens-Steiner	75
6.3.3	Equazioni cardinali della dinamica dei sistemi	76
6.3.4	Energia associata alla rotazione	78
6.3.5	Squilibrio dinamico	80
6.3.6	Moto rotazionale generico	81
6.3.7	Tensore d'inerzia	84
6.4	Equazioni di eulero	86
6.4.1	Moto generale di un corpo rigido	86
6.4.2	Le Equazioni di Eulero	86

6.4.3	Stabilità rotazionale	87
6.5	La trottola	90
7	Le Onde	93
7.1	Equazione delle onde	93
7.2	Ricavare l'equazione delle onde nel caso di corda vibrante . .	94
7.3	Equazione delle onde a più dimensioni	98
7.4	Serie di Fourier per descrivere le onde	99
7.5	La corda vibrante, produzione degli armonici	99
8	Fluidi	102
8.1	Grandezze fondamentali per descrivere i fluidi	102
8.1.1	Densità	102
8.1.2	Pressione	103
8.1.3	Altre grandezze	103
8.2	Fluidostatica	104
8.2.1	Legge di Stevino	105
8.2.2	Principio di Pascal	106
8.2.3	Barometro di Torricelli	107
8.2.4	Pressione atmosferica	108
8.2.5	Forza d'Archimede	108
8.2.6	Paraboloide di rotazione	110
8.2.7	Tensione superficiale	112
8.2.8	Capillarità	114
8.3	Dinamica dei fluidi	116
8.3.1	Teorema di Bernoulli	117
8.3.2	Fluidi Reali	118
8.3.3	Attrito viscoso	119
8.3.4	Gradiente di velocità in un tubo	121
8.3.5	Equazione di Poiseuille	122
8.4	Fluidi non Newtoniani	123
8.5	Numero di Reynolds	123
9	Le trasformazioni di Lorentz (relatività ristretta)	125
9.1	Scontro con Galileo	125
9.2	Relatività del tempo	126
9.3	Le trasformazioni relativistiche	127
9.4	Metrica di Minkowski e cono di luce	129
9.5	Neanche i neutrini possono correre più veloci di c	129

Capitolo 1

Derivate dei vettori

Si immagini di avere un vettore $\vec{v}(t)$ che varia nel tempo, è lecito chiedersi come calcolarsi la derivata di questo vettore calcolata rispetto al tempo.

Analogamente a una qualunque derivata, la derivata di un vettore è:

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

Ma come calcolare questo vettore?

1.1 Derivata del versore

Possiamo partire da alcune considerazioni da fare sul versore associato al vettore \vec{v} .

Iniziamo ponendoci il problema di calcolare la derivata di un versore \hat{v} . Per farlo notiamo che il prodotto scalare di un versore con se stesso è sempre 1, quindi

$$\hat{v}(t) \cdot \hat{v}(t) = 1$$

Deriviamo tutto rispetto al tempo e otteniamo

$$\frac{d\hat{v}(t)}{dt} \cdot \hat{v} + \hat{v} \cdot \frac{d\hat{v}(t)}{dt} = 0$$

$$2 \frac{d\hat{v}(t)}{dt} \cdot \hat{v} = 0 \tag{1.1}$$

Questo vuol dire che la derivata di un vettore è sempre ortogonale al vettore, perché il loro prodotto scalare è nullo. Poiché un versore non può mai cambiare di modulo o verso rispetto al tempo¹ l'unica cosa che può variare in un versore è la direzione.

¹Si ricorda che un versore ha modulo costante e sempre pari a 1, se cambiasse di verso dovrebbe passare dal valore 1 al valore -1 con una discontinuità in un intervallo di tempo pari a 0, e questo è impossibile

Cerchiamo ora di determinare il limite del rapporto incrementale:

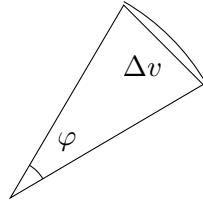
$$\frac{d\hat{v}}{d\hat{v}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overbrace{\hat{v}(t + \Delta t) - \hat{v}(t)}^{\Delta \vec{v}}}{\Delta t}$$

Quindi il modulo del vettore derivata di \hat{v} è:

$$\left| \frac{d\hat{v}}{dt} \right| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t}$$

Noi possiamo esprimere $\Delta \vec{v}$ in funzione dell'angolo φ di quanto ruota² il vettore nell'intervallo Δt

Figura 1.1: Misura di Δv al variare dell'angolo φ



In particolare si nota dalla Figura 1.1:

$$|\Delta \hat{v}| = 2 \sin \frac{\varphi}{2} \quad (1.2)$$

Scomponiamo il rapporto incrementale in questo altro modo:

$$\left| \frac{dv}{dt} \right| = \left| \frac{dv}{d\varphi} \right| \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

Calcoliamo il valore della derivata di \vec{v} rispetto all'angolo φ :

$$\frac{dv}{d\varphi} = \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{|\Delta v|}{\Delta \varphi} = \lim_{\Delta \varphi \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta \varphi}{2}}{\Delta \varphi} = 1$$

Per cui abbiamo la formula

$$\left| \frac{dv}{dt} \right| = \frac{d\varphi}{dt} \quad (1.3)$$

A questo punto introduciamo un versore \hat{t} normale a \hat{v} appartenente al piano di rotazione, possiamo dire che:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \hat{t}$$

²Ricordiamo che il versore \hat{v} sta ruotando

Ora definisco un altro versore \hat{n} uscente dal piano di rotazione³ così definito:

$$\hat{t} = \hat{n} \times \hat{v}$$

Quindi abbiamo che

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \hat{n} \times \hat{v}$$

Definiamo infine un vettore $\vec{\omega}$ in questo modo

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \hat{n} \tag{1.4}$$

Otteniamo che la derivata del versore è

$$\frac{d\hat{v}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{v} \tag{1.5}$$

1.2 Derivata del vettore generico

A questo punto risulta molto più semplice calcolare la derivata di un vettore qualunque, basta infatti avere l'accortezza di scrivere $\vec{v}(t) = |\vec{v}(t)|\hat{v}(t)$ e poi fare la derivata di un prodotto:

$$\frac{d(|\vec{v}|\hat{v})}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{v} + \frac{d\hat{v}}{dt} v$$

Usiamo la formula 1.5 e otteniamo

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \hat{v} + v(\vec{\omega} \times \hat{v})$$

Quindi

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \underbrace{\frac{dv(t)}{dt} \hat{v}}_{\text{Allungamento modulo}} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{v}}_{\text{Rotazione}} \tag{1.6}$$

Dove i due termini della somma descrivono rispettivamente l'allungamento del modulo in funzione del tempo e la rotazione del vettore sempre rispetto al tempo. Si può notare che il valore $\vec{\omega}$ definito nella formula 1.4 è proprio la velocità angolare.

³E quindi normale sia a \hat{v} che \hat{t} .

Capitolo 2

Cinematica

La cinematica studia la posizione di un punto materiale ad un certo istante t .

Lo studio della cinematica viene affrontato attraverso tre strumenti:

1. Sistema di riferimento
2. Traiettoria¹
3. Legge oraria

2.1 Traiettoria

La traiettoria è una curva monodimensionale che vive in uno spazio a 3 dimensioni. Per esprimerla è possibile ricorrere a 3 rappresentazioni:

Due dimensioni

Formula	Nome rappresentazione
$y = f(x)$	Esplicita
$h(x, y) = 0$	Implicita
$\begin{cases} x = f(s) \\ y = g(s) \end{cases}$	Parametrica

Per le tre dimensioni le rappresentazioni esplicita e implicita sono estremamente scomode, perché si dovrebbe ricorrere a intersezioni di superfici per descrivere una curva, per questo motivo è sempre preferibile una rappresentazione parametrica.

Poiché la traiettoria non cambia se sostituiamo ad s una qualunque funzione di s che abbia come dominio tutto \mathbb{R} scegliamo s in modo che rappresenti sempre la lunghezza della traiettoria stessa.

¹Insieme dei punti dello spazio visitati dal punto materiale

2.2 Legge oraria

La legge oraria è una funzione che ci informa sul valore s al variare di un altro parametro, il tempo.

$$s = s(t)$$

Questo completa la descrizione del moto. Componendo traiettoria e legge oraria otteniamo una completa relazione della posizione in funzione del tempo:

$$\begin{cases} x(s) = x[s(t)] = f(t) \\ y(s) = y[s(t)] = g(t) \\ z(s) = z[s(t)] = h(t) \end{cases}$$

Questo mi informa della posizione del punto materiale istante per istante.

2.3 Velocità e Accelerazione

Dalla precedente relazione è possibile introdurre un vettore $\vec{r}(t)$ così definito:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \quad (2.1)$$

$\vec{r}(t)$ è un vettore applicato, infatti rappresenta un vettore che parte dall'origine del nostro sistema di riferimento per arrivare fino alla posizione del punto materiale, cambiando sistema di riferimento cambia anche la sua origine e quindi il vettore \vec{r} .

Per questa caratteristica \vec{r} non può essere usato all'interno di leggi fisiche.

Tuttavia a partire da \vec{r} è possibile definire altri vettori che non dipendono dal sistema di riferimento scelto, come ad esempio $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

2.3.1 Velocità

Adesso ha senso chiedersi quali altre grandezze si possono derivare da \vec{r} .

Definizione 1 Il vettore $\vec{v}(t)$ velocità è il tasso di variazione di $\vec{r}(t)$:

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t) - \vec{r}(0)}{\Delta t}$$

È naturale chiederci come si rappresenta questo vettore con le sue componenti e come si rappresenta in maniera più astratta.

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{x(t) - x(0)}{\Delta t} \hat{i} + \frac{y(t) - y(0)}{\Delta t} \hat{j} + \frac{z(t) - z(0)}{\Delta t} \hat{k} \right)$$

Riconoscendo le derivate:

$$\vec{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt} \hat{i} + \frac{dy(t)}{dt} \hat{j} + \frac{dz(t)}{dt} \hat{k} \quad (2.2)$$

La rappresentazione cartesiana è particolarmente utile per svolgere calcoli, ma è difficile ricavarne direttamente le proprietà di questo vettore velocità, per questo conviene darle anche un'altra definizione.

Iniziamo con il notare che per $\Delta t \rightarrow 0$ il valore Δr si approssima all'arco di traiettoria, inoltre è parallelo alla tangente alla traiettoria stessa, da queste informazioni ricaviamo che:

$$\left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| \parallel \hat{t} \rightarrow \frac{ds}{dt}$$

Dove \hat{t} rappresenta il versore tangente alla traiettoria

Mettendo insieme le due espressioni ricaviamo che la velocità può essere espressa

$$\vec{v}(t) = \frac{ds}{dt} \hat{t} \quad (2.3)$$

Da questa formula possiamo ricavare molte più informazioni interessanti: ad esempio ricaviamo il fatto che il vettore velocità ha direzione tangente alla traiettoria, e il modulo dipende solo dalla legge oraria $s(t)$.

2.3.2 Accelerazione

Definizione 2 Si definisce il vettore accelerazione il tasso di variazione della velocità nel tempo:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t) - \vec{v}(0)}{\Delta t}$$

Volendo si potrebbe andare avanti e pensare di definire anche il tasso di variazione dell'accelerazione nel tempo e così via, in realtà, poiché nello studio della dinamica si scopre che le cause dei moti, dovute alle forze che agiscono su un corpo, modificano l'accelerazione di un corpo non ha senso studiare le derivate successive.

Anche in questo caso è immediata la rappresentazione dell'accelerazione in forma cartesiana:

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \hat{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2} \hat{j} + \frac{d^2z(t)}{dt^2} \hat{k} \quad (2.4)$$

Come per la velocità questa formula è molto comoda per svolgere dei calcoli numerici, ma è difficile comprendere in profondità il significato dell'accelerazione.

Per arrivare a questo scopo occorre trovare la formulazione astratta del vettore accelerazione.

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \hat{t} \right)$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2s}{dt^2} \hat{t} + \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\hat{t}}{dt}$$

Cerchiamo di capire più affondo il significato del termine $\frac{d\hat{t}}{dt}$

$$\frac{d\hat{t}(t)}{dt} = \frac{d\hat{t}[s(t)]}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\hat{t}}{ds}$$

Tornando alla formula precedente diventa:

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2s}{dt^2} \hat{t} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \cdot \frac{d\hat{t}}{ds}$$

A questo punto cerchiamo di capire il comportamento di $\frac{d\hat{t}}{ds}$. Come abbiamo visto nel capitolo precedente la formula 1.1 ci dice che la derivata di un versore è sempre ortogonale al versore e la formula 1.2 ci dice che $|\Delta\hat{t}| = 2|\hat{t}| \sin \frac{\varphi}{2}$, abbiamo che:

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} |\Delta\hat{t}| = \varphi$$

Per cui chiamando \hat{n} il versore normale alla traiettoria abbiamo che

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Delta\hat{t}}{\Delta s} = \hat{n} \frac{\varphi}{\Delta s}$$

Poiché qualunque traiettoria per $\Delta s \rightarrow 0$ può essere approssimata al cerchio osculatore di raggio ρ risulta che $\Delta s = \rho \cdot \varphi$. Per cui

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \hat{n} \frac{1}{\rho}$$

Dove ρ è definito come il raggio di curvatura della traiettoria².

Ora siamo in grado di scrivere l'accelerazione in una maniera soddisfacente, che ci consente di comprendere appieno le sue proprietà fisiche:

$$\vec{a}(t) = \underbrace{\frac{d^2s}{dt^2} \hat{t}}_{\text{Componente parallela al moto}} + \underbrace{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \hat{n} \frac{1}{\rho}}_{\text{Componente perpendicolare al moto}} \quad (2.5)$$

2.4 Zoologia dei moti

A questo punto possiamo classificare i moti in base alla traiettoria e alla legge oraria che lo contraddistinguono, prima ci è utile dare delle semplici definizioni per abbreviare il linguaggio:

²raggio del cerchio osculante

Legge oraria		Traiettoria	
$\ddot{s} = 0$	Moto <i>uniforme</i>	$\rho = c$	Moto <i>circolare</i>
$\ddot{s} = c$	Moto <i>uniformemente accelerato</i>	$\rho = \infty$	Moto <i>rettilineo</i>
$\ddot{s} = f(t)$	Moto <i>Vario</i>	$\rho = f(t)$	Moto <i>generico</i>

Definizione 3 Si definiscono i simboli \dot{s} e \ddot{s} rispettivamente derivata prima e seconda del parametro s :

$$\dot{s} = \frac{ds}{dt}$$

$$\ddot{s} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Passiamo ora a riscrivere le formule trovate nella sezione precedente con questa nuova notazione compatta:

$$\vec{r}(t)$$

$$\vec{v}(t) = \dot{s}\hat{t}$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{s}\hat{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{n}$$

Adesso passiamo alle classificazioni dei moti

Si nota subito che abbiamo suddiviso la caratterizzazione secondo la legge oraria imponendo un valore della derivata seconda dello spazio, che **non** è l'accelerazione³, mentre abbiamo suddiviso le caratterizzazioni per traiettoria in base al valore del raggio di curvatura.

Studiamo ora singolarmente alcuni di questi casi interessanti.

2.4.1 Moti rettilinei

Iniziamo dai moti rettilinei, questi moti hanno $\rho = \infty$ e la traiettoria è una retta nello spazio diretta dal versore \hat{t} . Questo ci permette di trattare il moto come unidimensionale e semplificare il problema, e quindi possiamo trattare velocità, accelerazione e posizione come scalari.

Poiché il raggio di curvatura è infinito abbiamo che $\vec{a}(t) = \ddot{s} + \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{\dot{s}^2}{\rho}$

Per cui abbiamo la seguente semplificazione:

$$r(t) = s \quad v(t) = \dot{s} \quad a(t) = \ddot{s}$$

Moto rettilineo uniforme

Basta integrare l'accelerazione per ottenere la formula del moto rettilineo uniforme.

$$\ddot{s} = 0 \quad v(t) = \int_0^t \ddot{s} dt = v_0$$

³Infatti Il moto circolare uniforme pur avendo $\ddot{s} = 0$ ha un'accelerazione, l'accelerazione centripeta

$$s(t) = \int_0^t v(t) dt = v_0 t + s_0 \quad (2.6)$$

Questa è la soluzione più generale possibile del moto rettilineo uniforme

Moto uniformemente accelerato

Procediamo come nel caso precedente, ma questa volta partiamo da una diversa situazione iniziale

$$\begin{aligned} \ddot{s} = a \quad v(t) &= \int_0^t v(t) dt = at + v_0 \\ s(t) &= \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Questa è la formula dei moti rettilinei uniformemente accelerati

Moto rettilineo vario

Passiamo ora al caso più generico in cui l'accelerazione è una funzione del tempo, otteniamo nel modo più generico possibile che

$$\begin{aligned} \ddot{s} = f(t) \quad v(t) &= \int_0^t f(t) dt^I + v_0 \\ s(t) &= \int_0^t dt^I \int_0^t dt^{II} f(t^{II}) + v_0 t + s_0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Soluzione del moto vario

Bisogna notare che tutte in tutti i casi visti la soluzione è nota a meno di due costanti arbitrarie: v_0 e s_0 .

In fisica questo vuol dire che l'evoluzione della posizione di un punto materiale nel tempo dipende oltre che dall'accelerazione anche dalla velocità iniziale e dalla posizione al tempo $t = 0$.

2.4.2 Moto dei gravi

I moti dei gravi sono caratterizzati dall'essere soggetti ad un accelerazione costante, l'accelerazione di gravità \vec{g} . Per cui possiamo subito ricavare la legge vettoriale che governa questo moto:

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \vec{v}_0 + \vec{g}(t - t_0) \\ \vec{r}(t) &= \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t [\vec{v}_0 + \vec{g}(t' - t_0)] dt' \end{aligned}$$

Per cui il moto del grave ha un'equazione del genere:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\vec{g}(t - t_0)^2 \quad (2.9)$$

Poiché i vettori \vec{v} e \vec{g} non sono soggetti a rotazioni, ma sono costanti nel tempo, si osserva subito che il moto del grave avviene sempre all'interno di un piano, la cui formula parametrica la si ricava riscrivendo la 2.9 in questo modo forse più familiare:

$$P = P_0 + t\vec{v} + s\vec{g}$$

Dove \vec{v} e \vec{g} sono i vettori direttori del moto.

Possiamo scegliere quindi un sistema di riferimento opportuno per poter studiare il moto in due dimensioni, scegliendo l'asse z ortogonale al piano del moto del grave e il tempo $t_0 = 0$.

Studiando le componenti cartesiane del vettore possiamo dedurre dalla formula 2.9 le seguenti espressioni:

$$\begin{cases} \vec{v}(t) = (v_0 \cos \alpha)\hat{i} + (v_0 \sin \alpha - gt)\hat{j} \\ \vec{r}(t) = (v_0 \cos \alpha \cdot t)\hat{i} + (v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2)\hat{j} \end{cases}$$

Può essere conveniente riscrivere questa formula con equazioni parametriche:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t \\ y(t) = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

Risulta semplice da queste equazioni parametriche dedurre la traiettoria:

$$y = \tan \alpha \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 \quad (2.10)$$

La Figura 2.1 offre un disegno schematico di un esempio di traiettoria di moto dei gravi.

2.5 Trasformazioni

Una delle parti più difficili dello studio della cinematica è la trattazione delle trasformazioni di sistemi di riferimento. Come si comportano i nostri tre vettori, raggio, velocità e accelerazioni se osservati da un altro sistema di riferimento, magari che si sta spostando e in rotazione?

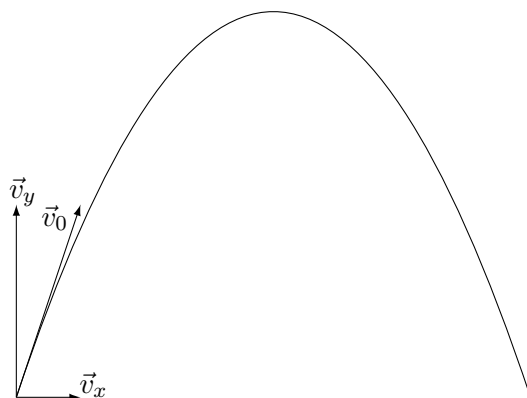
Sia $\vec{R}_{ss'}$ il vettore spostamento che individua l'origine del sistema S' in funzione di S .

Come si osserva dalla Figura 2.2 per un generico vettore posizione vale la relazione

$$\vec{r}(t) = \vec{R}_{ss'} + \vec{r}'(t)$$

In realtà possiamo ulteriormente generalizzare nel caso in cui il nostro vettore sia soggetto agli effetti di una rotazione.

Figura 2.1: Esempio di moto dei gravi, è mostrata la velocità iniziale scomposta nelle componenti lungo gli assi cartesiani



Sia $M_{ss'}$ la matrice di rotazione di S' rispetto a S , allora valgono le seguenti trasformazioni.

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = M_{ss'} \cdot \vec{r}'(t) + \vec{R}_{ss'} \\ \vec{v}(t) = M_{ss'} \cdot \vec{v}'(t) \\ \vec{a}(t) = M_{ss'} \cdot \vec{a}'(t) \end{cases}$$

Ma cosa succede se i sistemi di riferimento sono in moto l'uno rispetto all'altro?

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{R}_{ss'}(t)$$

Ricaviamo la velocità:

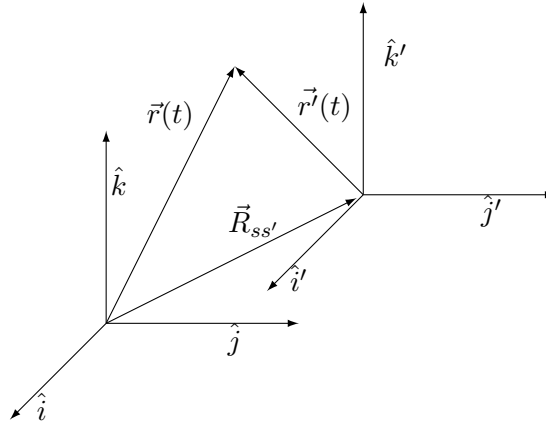
$$\vec{v}(t) = \left[\frac{d\vec{r}'(t)}{dt} \right]_s + \left[\frac{d\vec{R}_{ss'}(t)}{dt} \right]_s$$

Cerchiamo di sviluppare la derivata di \vec{r}' rispetto al sistema di riferimento S , per evitare di coinvolgere nei calcoli la derivata della matrice di rotazione (che è una funzione del tempo) ricorriamo alla notazione cartesiana:

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\hat{i}'(t) + y'(t)\hat{j}'(t) + z'(t)\hat{k}'(t)$$

Deriviamo rispetto al tempo

Figura 2.2: Trasformazioni di sistemi di riferimenti



$$\frac{d\vec{r}'(t)}{dt} = \underbrace{\frac{dx'(t)}{dt}\hat{i} + \frac{dy'(t)}{dt}\hat{j} + \frac{dz'(t)}{dt}}_{\left[\frac{d\vec{r}'(t)}{dt}\right]_{s'}} + x'\frac{d\hat{i}'}{dt} + y'\frac{d\hat{j}'}{dt} + z'\frac{d\hat{k}'}{dt}$$

Basta ricordarsi cos'è la derivata di un versore, ricordiamo la formula 1.5, e giungiamo

$$\left[\frac{d\vec{r}'(t)}{dt}\right]_s = \left[\frac{d\vec{r}'(t)}{dt}\right]_{s'} + \vec{\omega} \times \underbrace{\left[x'\hat{i}' + y'\hat{j}' + z'\hat{k}'\right]}_{\vec{r}'}$$

$$\left[\frac{d\vec{r}'(t)}{dt}\right]_s = \left[\frac{d\vec{r}'(t)}{dt}\right]_{s'} + \vec{\omega} \times \vec{r}' \quad (2.11)$$

Siamo riusciti a ricavare una formula che esprime la velocità di un punto materiale in movimento rispetto a un sistema che è a sua volta in moto:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{r}'(t)}_{\text{Velocità trascinamento}} + \underbrace{\vec{V}_{ss'}(t)}_{\text{Velocità traslazione}} \quad (2.12)$$

2.5.1 Accelerazione e forze apparenti

Analogamente a quanto visto per la velocità possiamo ripetere i calcoli per scoprire quanto vale l'accelerazione nel nuovo sistema S' .

Poiché si tratta di derivare vettori e versori può essere comodo rivedersi le formule del Capitolo 1.

$$\vec{a}(t) = \left[\frac{d\vec{v}(t)}{dt} \right]_s = \left[\frac{d\vec{v}'(t)}{dt} \right]_s + \left[\frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r}')}{dt} \right]_s + \frac{d\vec{V}_{ss'}(t)}{dt}$$

Riprendiamo la formula 2.11 per dire che

$$\frac{d\vec{v}'(t)}{dt} = \omega \times \vec{v}' + \underbrace{\left[\frac{d\vec{v}'}{dt} \right]_{s'}}_{\vec{a}'(t)}$$

Quindi conosciamo tutti i termini della derivata tranne la derivata di $\vec{\omega} \times \vec{r}'$. Calcoliamocela:

$$\left[\frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r}')}{dt} \right]_s = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \left[\frac{d\vec{r}'}{dt} \right]_s$$

Ricorriamo un'altra volta alla formula 2.11 per trovare che

$$\left[\frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r}')}{dt} \right]_s = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \left[\vec{\omega} \times \vec{r}' + \left[\frac{d\vec{r}'}{dt} \right]_{s'} \right]$$

Usiamo la proprietà distributiva del prodotto vettoriale

$$\left[\frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r}')}{dt} \right]_s = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{v}'(t)$$

Mettiamo tutto insieme e otteniamo la formula dell'accelerazione:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}'(t) + \vec{A}_{ss'} + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}'}_{\text{Accelerazione di Coriolis}} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}'}_{\text{Accelerazione centrifuga}} \quad (2.13)$$

Sistemi inerziali

Si nota subito che in questa formula entrano a far parte due membri che sono presenti nel caso in cui i due sistemi di riferimento abbiano tra loro una velocità di rotazione non nulla ($\vec{\omega}$).

In particolare, come vedremo meglio quando ci addenteremo nello studio della dinamica, tutte le accelerazioni sono prodotte da forze.

È quindi naturale introdurre due nuove forze per queste accelerazioni, che si chiamano *forze apparenti*. Tuttavia queste forze non esistono, poiché le leggi della dinamica di Newton valgono solo per i sistemi *relativamente inerziali*.

Definizione 4 *Si definiscono due sistemi come relativamente inerziali se valgono le seguenti condizioni*

$$\begin{cases} \vec{A}_{ss'} = 0 \\ \vec{\omega} = 0 \end{cases}$$

Nel caso in cui due sistemi siano relativamente inerziali si possono applicare le trasformazioni di Galileo⁴

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{R}_{ss'}(t) \\ \vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{V}_{ss'}(t) \\ \vec{a}(t) = \vec{a}'(t) \end{cases}$$

Sistemi non inerziali

Quando due sistemi non sono inerziali bisogna usare le equazioni complete per studiarne la cinematica:

$$\begin{cases} \vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{R}_{ss'}(t) \\ \vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{\omega} \times \vec{r}'(t) + \vec{V}_{ss'}(t) \\ \vec{a}(t) = \vec{a}'(t) + \vec{A}_{ss'} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}' \end{cases}$$

⁴Chiaramente sono valide per velocità moderate rispetto a quelle della luce, per velocità più alte occorre usare le trasformazioni di Lorentz

Capitolo 3

La Dinamica

Mentre la cinematica studia il moto di un corpo, la dinamica studia le cause che stanno alla base dei moti. Per affrontare questo studio si introduce un concetto che ha origini antichissime: la **Forza**.

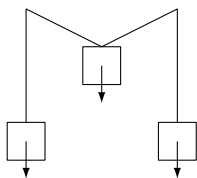
Già ai tempi dei greci era chiaro che all'origine di un moto c'è sempre una forza, anche se solo in tempi più recenti (XVII e XVIII sec.) si è riusciti a descrivere in maniera esaustiva come le forze modificano i moti degli oggetti. La formulazione quindi dei principi della dinamica è stato un processo lento a cui hanno contribuito tanti studiosi, Galileo, Copernico, Keplero, e che ha compiuto Isaac Newton.

3.1 Prime osservazioni sull'azione delle forze

La prima osservazione che occorre fare è che le Forze agiscono come vettori, sono dunque grandezze *vettoriali*.

Per vedere bene questo concetto basta costruire un sistema di carrucole come nella Figura 3.1

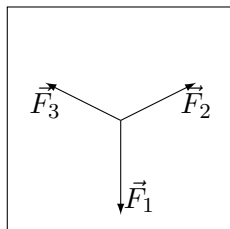
Figura 3.1: Sistema di carrucole in equilibrio, perfettamente bilanciato



Come ci mostra la Figura 3.1 poiché il sistema è in equilibrio la somma vettoriale di tutte le forze deve essere nulla, quindi le forze si sommano vettorialmente tra loro.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$$

Figura 3.2: Azione delle forze sulla massa centrale della Figura 3.1



Questo principio è detto **Principio di sovrapposizione**.

L'esempio visto prima delle carrucole in equilibrio sfrutta il principio di sovrapposizione, particolarmente utile nello studio della statica¹.

3.2 I principi della dinamica

3.2.1 Principio d'inerzia

In un sistema di riferimento inerziale² un punto materiale su cui la risultante delle forze applicata sia nulla si muove di moto rettilineo uniforme.

Questo comporta che se esiste un sistema di riferimento inerziale, sono a loro volta sistemi inerziali tutti quelli che si muovono di moto rettilineo uniforme rispetto al primo.

Infatti, esprimendo \vec{v} il vettore velocità di un punto materiale su cui la risultante delle forze è nulla, sia \vec{V}_k la velocità di un sistema, il moto di \vec{v} rispetto al sistema K sarà:

$$\vec{v}' = \vec{v} + \vec{V}_k$$

3.2.2 Secondo principio

Il secondo principio della dinamica afferma che applicare una forza ad un punto materiale equivale a mutarne l'accelerazione. In particolare può essere formulato in questo modo:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m\vec{a}$$

E in particolare se le forze applicate dipendono dal tempo

¹Studio dei corpi in equilibrio dinamico

²vedi la definizione 4

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i(t) = m\vec{a}(t)$$

Si noti il coefficiente di proporzionalità m che appare nella formula tra Forze e accelerazione. Questo rappresenta la massa inerziale di un corpo. Questa è una caratteristica intrinseca dei singoli corpi, e rappresenta l'inerzia dei corpi, ovvero quanta forza è necessaria per accelerare quel corpo.

A questo punto è naturale definire un tipo di forza molto comune, la forza peso. Poiché l'accelerazione di gravità è con buona approssimazione costante per tutti i corpi, la forza peso di un corpo dipende solo dalla sua massa:

$$\vec{F}_p = m\vec{g}$$

Può essere utile dare una seconda definizione, più generale del secondo principio. Per farlo, dobbiamo introdurre prima due definizioni:

Definizione 5 *La quantità di moto di un corpo è definita come il prodotto della massa per la velocità:*

$$\vec{q} = m\vec{v}$$

Risulta quindi molto più generale definire la forza come la variazione della quantità di moto nel tempo, in particolare

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \frac{d\vec{q}}{dt}$$

La convenienza ad usare questa formula sta nel fatto che ci fornisce una valida soluzione anche nel caso in cui la massa non sia costante;³ derivando la quantità di moto otteniamo:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Poiché $\frac{d\vec{v}}{dt}$ è proprio l'accelerazione, la formula finale viene:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\vec{a}$$

Che risulta proprio $F = ma$ nel caso in cui la massa sia costante (e quindi la derivata nulla).

³Macchina che consuma carburante, goccia d'acqua che cade acquisendo massa dall'ambiente esterno...

Definizione 6 Si definisce *impulso* l'integrale di una forza rispetto al tempo.

$$\vec{F} \Delta t = \Delta \vec{q}$$

L'impulso \vec{J} è:

$$\vec{J} = \int_{t_0}^{t_f} \vec{F} dt$$

3.2.3 Principio di azione-reazione

Il terzo principio della dinamica afferma che le forze si manifestano sempre a coppie: a ogni forza ne corrisponde una con pari modulo e direzione, ma verso contrario.

Un classico esempio in cui si vedono chiaramente le due forze è un oggetto poggiato su un piano, immobile. Sappiamo per certo che questo oggetto è attratto dalla gravità terrestre, che obbligherebbe l'oggetto a entrare nel tavolo, ma il tavolo esercita sull'oggetto la stessa forza in verso opposto, mantenendo in equilibrio l'oggetto.

Perché il terzo principio sia vero non c'è bisogno che i corpi siano a contatto; un esempio è la forza gravitazionale, infatti due corpi si attraggono sempre reciprocamente.

3.3 Momento della quantità di moto

Si è già definito il vettore, quantità di moto, come il prodotto tra lo scalare massa, e il vettore velocità associati ad un punto materiale, $\vec{q} = m \cdot \vec{v}$. Ora consideriamo un punto materiale, al quale associamo un vettore posizione $\vec{r}(t)$ e una velocità \vec{v} , prendiamo poi un altro punto G , come è raffigurato nella figura 3.3:

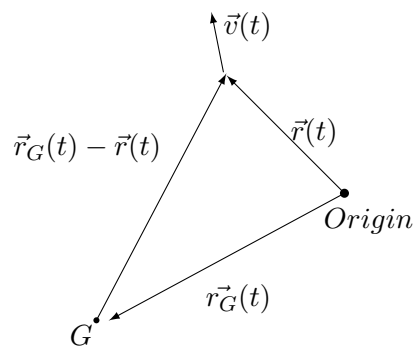


Figura 3.3: Rappresentazione del momento rispetto ad un polo G diverso dall'origine degli assi

Definiamo il prodotto vettoriale rispetto a G, momento della quantità di moto, o momento angolare, come segue:

$$\vec{P} = (\vec{r}(t) - \vec{r}_G(t)) \wedge \vec{q}$$

Ora è lecito chiedersi come questo momento vari, al variare del tempo:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(\vec{r}(t) - \vec{r}_G(t))}{dt} \wedge \vec{q} + (\vec{r}(t) - \vec{r}_G(t)) \wedge \frac{d\vec{q}}{dt}$$

Ora spezzando il primo termine e sostituendo $\vec{q} = m \cdot \vec{v}$, otteniamo:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \wedge \vec{q} - \frac{d\vec{r}_G(t)}{dt} \wedge \vec{q} + (\vec{r}(t) - \vec{r}_G(t)) \wedge m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Ma $\frac{d\vec{r}(t)}{dt} \wedge \vec{q} = \vec{v}(t) \wedge m \cdot \vec{v}(t) = 0$ ⁴ e $(\vec{r}(t) - \vec{r}_G(t)) \wedge m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{r}(t) - \vec{r}_G(t)) \wedge \vec{F}_{tot} = \vec{M}$ ⁵ Dove, \vec{M} è definito momento delle forze agenti sul punto materiale. Quindi la derivata assume la forma:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = -\vec{v}_G(t) \wedge \vec{q} + \vec{M}$$

Solitamente, tuttavia si sceglie il punto G, fisso e quindi:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{M}$$

3.4 Teorema del momento dell'impulso

Considerando intervalli di tempo, molto piccoli allora:

$$\Delta\vec{P} = \int_{t_0}^{t_1} \vec{M} dt$$

Ne segue l'importantissimo risultato che se $\vec{M} = 0$ allora il momento angolare rimane costante, questo fa sì che il moto risultante sia confinato in un piano.

3.5 Attrito tra corpi rigidi

Un oggetto poggiato su una superficie, oltre ad essere sottoposto ad una forza di reazione vincolare \vec{R} è sottoposta anche ad una forza di attrito, diretta lungo la tangente del piano, che si oppone allo spostamento.

⁴Il prodotto vettoriale fra vettori paralleli è nullo

⁵Infatti $m \cdot \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = m \cdot \vec{a} = \vec{F}$

Dal punto di vista microscopico le origini di questa forza possono rintracciarsi nelle interazioni tra gli atomi dei due corpi e nell'irregolarità delle superfici.

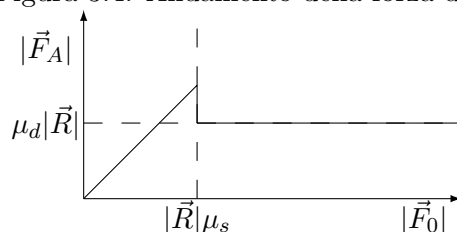
Possiamo misurare empiricamente queste forze di attrito applicando una forza \vec{F}_0 tangente al piano e vedere il comportamento dell'oggetto.

Notiamo subito che per forze molto piccole l'oggetto rimane immobile, deduciamo quindi che si sta sviluppando una forza d'attrito di modulo uguale ma contraria alla forza \vec{F}_0 .

Ad un certo valore limite di \vec{F}_0 l'oggetto si mette in moto.

Possiamo rappresentare questo fenomeno in un grafico (Figura 3.4) per maggiore chiarezza:

Figura 3.4: Andamento della forza d'attrito



Come si può intuitivamente dedurre (ed è confermato dalle prove sperimentali) il valore limite della forza d'attrito per cui l'oggetto rimane immobile dipende dalla forza vincolare del piano e da una caratteristica delle due superfici che chiamiamo μ_s . Questo valore risulta essere pari a

$$F_{lim} = |\vec{R}|\mu_s$$

Per forze più grandi di F_{lim} il valore di F_a scende. L'andamento complessivo può essere descritto così:

$$\vec{F}_a = \begin{cases} |\vec{F}_0| & |\vec{F}_0| < \mu_s |\vec{R}| \\ \mu_d |\vec{R}| & |\vec{F}_0| > \mu_s |\vec{R}| \end{cases}$$

3.6 Forze che dipendono dalla posizione

Fino ad ora abbiamo parlato di forze che agiscono indipendentemente dalla posizione di un oggetto. Esistono alcuni casi in cui l'intensità e il verso di una forza possono dipendere dalla posizione dell'oggetto.

L'esempio più classico per questo è la molla. Se scegliamo come origine del nostro sistema di riferimento la posizione di riposo della molla, la forza elastica che una molla esercita è proporzionale alla posizione dell'oggetto, in particolare

$$\vec{F} = -kx \tag{3.1}$$

Proviamo a studiare il moto di un oggetto sottoposto a questa forza.

3.6.1 Moto armonico

Combinando il secondo principio della dinamica con la legge di Hooke (3.1) otteniamo:

$$F = M\ddot{x} = -kx$$

Questa è una semplice equazione differenziale del secondo ordine a coefficienti costanti, lineare e omogenea.

$$\ddot{x} + \frac{k}{M}x = 0$$

Le soluzioni generali dell'equazione sono:

$$x(t) = c_1 e^{i\sqrt{\frac{k}{M}}t} + c_2 e^{-i\sqrt{\frac{k}{M}}t}$$

Il significato fisico della formula ci porta a introdurre due grandezze: x_0 (posizione al tempo $t = 0$) e v_0 (velocità al tempo $t = 0$). Questi due valori permettono di risolvere l'equazione con il criterio di Cauchy:

$$\begin{aligned}x(t=0) &= c_1 e^0 + c_2 e^0 = c_1 + c_2 = x_0 \\ \dot{x}(t=0) &= c_1 \left(i\sqrt{\frac{k}{M}} \right) - c_2 \left(i\sqrt{\frac{k}{M}} \right) = v_0\end{aligned}$$

Basta risolvere il sistema per trovare i valori di c_1 e c_2 che soddisfano le seguenti condizioni. Abbiamo che:

$$\begin{aligned}c_1 &= \frac{x_0}{2} - \frac{iv_0}{2\sqrt{\frac{k}{M}}} \\ c_2 &= \frac{x_0}{2} + \frac{iv_0}{2\sqrt{\frac{k}{M}}}\end{aligned}$$

Applicando dovutamente le formule di Eulero e sostituendo i valori ottenuti delle costanti nella formula generica otteniamo una semplice equazione del moto reale:

$$x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t\right) + \frac{v_0}{\sqrt{\frac{k}{M}}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t\right)$$

Definizione 7 Sia definita ω la **Pulsazione** di un moto armonico in questo modo:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$$

Sostituendo ω nella formula precedente otteniamo la formula generale del moto armonico:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) \quad (3.2)$$

Come si può notare il moto armonico è una funzione periodica, dove seno e coseno sono in fase (hanno stesso periodo e argomento).

Calcolare il periodo del moto è intuitivo e semplice.

Definizione 8 Il *Periodo* di un moto armonico T si calcola:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

3.7 Forze che dipendono dalla velocità (attriti viscosi)

Oltre alle forze che dipendono dalla posizione del nostro punto materiale esistono anche forze che dipendono dalla sua velocità. Queste forze prendono il nome di attriti viscosi e ne è un esempio l'attrito dell'aria o dei gas.

L'attrito viscoso è una forza che si oppone al moto di un oggetto ed è proporzionale alla velocità dell'oggetto in moto. Può essere scritto come

$$\vec{F} = -\beta \vec{v}$$

Poiché il moto è unidimensionale:

$$M\ddot{x} = -\beta\dot{x}$$

Come nel caso del moto armonico può essere interessante studiare il moto che si genera, per esempio studiamo il moto di un oggetto in caduta libera frenato dall'aria.

3.7.1 Moto smorzato

Prendiamo la formula precedente e uniamola al secondo principio della dinamica, otteniamo la seguente equazione differenziale:

$$F = M\ddot{x} = -\beta\dot{x} + Mg$$

$$M\ddot{x} + \beta\dot{x} = Mg$$

Questa equazione è un po' più complessa di quella del moto armonico, in quanto non è omogenea. Per risolverla occorre combinare le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata con una soluzione particolare di quella non omogenea (Teorema di struttura).

In questo caso una soluzione particolare è intuitiva:

$$\dot{x} = \frac{Mg}{\beta}$$

Infatti $\ddot{x} = 0$ e $\beta \frac{Mg}{\beta} = Mg$. Da cui segue che:

$$x(t) = \frac{Mg}{\beta}t$$

Ora risolviamo l'equazione omogenea associata:

$$M\ddot{x} + \beta\dot{x} = 0$$

Si trova che questa equazione ammette come soluzione:

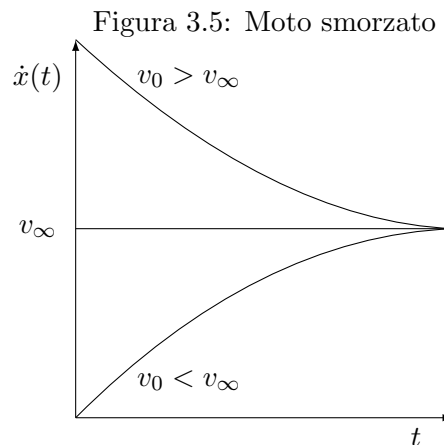
$$x(t) = c_1 e^{-\frac{\beta}{M}t} + c_2$$

Applichiamo il teorema di struttura e otteniamo la soluzione generica del moto smorzato:

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{\beta}{M}t} + \frac{Mg}{\beta}t + c_2$$

Anche in questo caso si può tentare di ricavare c_1 e c_2 a partire dal problema di Cauchy, imponendo che $x(t=0) = x_0$ e che $\dot{x}(t=0) = v_0$.

Il grafico di questo moto sarà qualcosa di simile a questo:



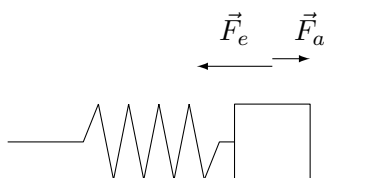
Si nota che in questo andamento la velocità ha un valore limite all'infinito, e possiamo facilmente ricavare questo valore dall'equazione iniziale:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x}(t) &= v_\infty \\ \lim_{t \rightarrow \infty} (M\ddot{x} + \beta\dot{x} - Mg) &= \beta v_\infty - Mg = 0 \\ v_\infty &= \frac{Mg}{\beta} \end{aligned}$$

3.8 Moto armonico smorzato

Dopo aver analizzato separatamente il moto armonico, e il moto smorzato, analizzeremo la combinazione dei due.

Figura 3.6: Schema del moto armonico smorzato



Combinando la forza elastica della molla con la forza di attrito viscoso della legge di Stokes otteniamo che

$$\vec{F}_a = -\beta\vec{v} \quad \vec{F}_e = -k\Delta\vec{x}$$

La forza totale che agisce sul corpo è:

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_e + \vec{F}_a$$

Da cui ricaviamo l'equazione differenziale che definisce il moto:

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Cerchiamo le soluzioni dell'equazioni differenziale in $x(t) = e^{\lambda t}$. Cerchiamo per quali valori di λ si annulla il polinomio caratteristico:

$$\lambda^2 + \frac{\beta}{m}\lambda + \frac{k}{m} = 0$$

Studiamo il segno del discriminante per individuare le soluzioni di λ . Abbiamo 3 casi a seconda del discriminante:

1. $\beta^2 - 4km < 0$
2. $\beta^2 - 4km > 0$
3. $\beta^2 - 4km = 0$

3.8.1 Caso 1: oscillazione smorzata sottocritica

In questo caso il discriminante è negativo, perciò λ ammette due soluzioni complesse e coniugate del tipo $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\gamma$, dove i valori di α e γ si ricavano dalla formula di risoluzione delle equazioni di secondo grado:

$$\alpha = \frac{-\beta}{2m} \quad \gamma = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}$$

Si può riconoscere nella formula di γ il valore della pulsazione del moto armonico $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Da cui segue

$$\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{4m^2}}$$

Passiamo a scrivere le soluzioni generiche dell'equazione differenziale:

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{\beta}{2m}t} e^{-i\gamma t} + c_2 e^{-\frac{\beta}{2m}t} e^{i\gamma t}$$

Si procede analogamente a quanto fatto per il moto armonico semplice affrontando il problema di Cauchy ponendo $x(0) = x_0$ e $\dot{x}(0) = v_0$ per trovare i valori dei coefficienti c_1 e c_2 che soddisfano questa condizione e otteniamo l'equazione del moto armonico smorzato:

$$x(t) = A \underbrace{e^{-\frac{\beta}{2m}t}}_{\text{Fattore che attenua l'intensità}} \cos(\omega_1 t + B) \quad (3.3)$$

Il fattore $e^{-\frac{\beta}{2m}t}$ Attenua progressivamente l'intensità, si osservi che nel caso in cui $\beta = 0$ l'equazione è del tutto simile a quella del moto armonico semplice!

Il valore scelto per ω_1 è il coefficiente $\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{4m^2}}$. Anche in questo caso si vede che per $\beta = 0$ riesce che $\omega_1 = \omega$, ritrovando l'equazione del moto armonico semplice. Il grafico 3.7 rende visibile questo effetto.

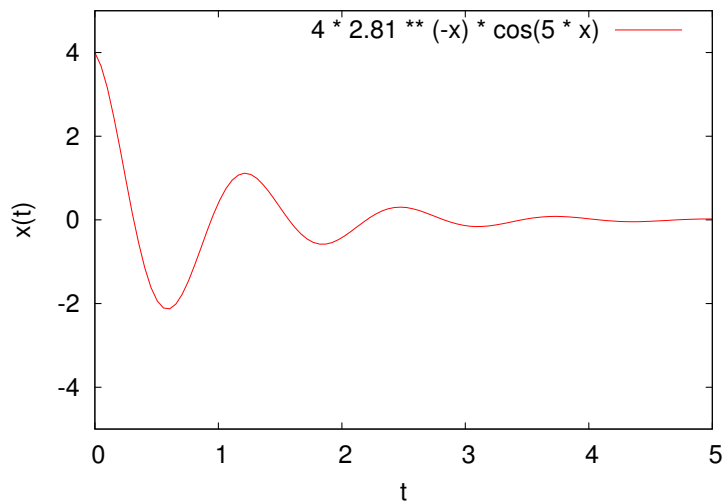
Come si nota l'ampiezza diminuisce progressivamente, fino a diventare praticamente nulla, è utile introdurre una quantità che indica il tempo di smorzamento (ovvero quanto tempo impiega il moto a essere praticamente nullo).

Definizione 9 Si definisce il tempo di smorzamento τ in questo modo:

$$e^{-\frac{\beta}{2m}t} = e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \tau = \frac{2m}{\beta}$$

La curva si considera nulla dopo un tempo pari a 2 o 3 τ

Figura 3.7: Grafico oscillazioni sottocritiche



3.8.2 Caso 2: oscillazione sovracritica

In questo caso il segno del discriminante è positivo, quindi $\beta^2 - 4mk > 0$.

Il polinomio caratteristico ammette 2 soluzioni reali e distinte, λ_1 e λ_2 . Memori delle definizioni date nella sezione 3.8.1, richiamiamo i valori di $\alpha = -\frac{\beta}{2m}$ e $\omega_1 = \sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$. Segue che la soluzione generale del moto è:

$$x(t) = c_1 e^{\alpha t} e^{\omega_1 t} + c_2 e^{\alpha t} e^{-\omega_1 t} \quad (3.4)$$

In questa formula i fattori dominanti sono $e^{\alpha t}$ quindi, poiché $\alpha < 0$, il valore del grafico decresce tendendo a zero. In questo caso non si percepiscono oscillazioni come mostrato nel grafico 3.8

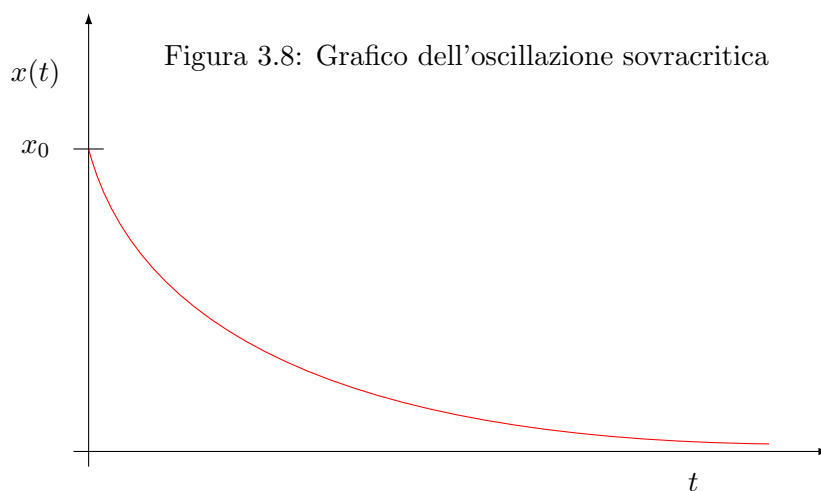


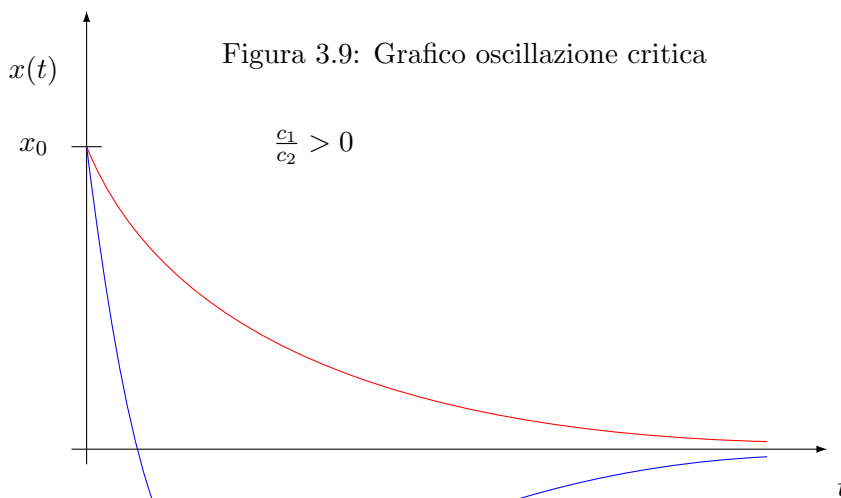
Figura 3.8: Grafico dell'oscillazione sovracritica

3.8.3 Caso 3: oscillazione con smorzamento critico

L'ultimo caso si verifica quando il discriminante è proprio uguale a zero. Le due soluzioni del polinomio caratteristico coincidono, per cui la soluzione generale diventa:

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{\beta}{2m}t} + c_2 t e^{-\frac{\beta}{2m}t}$$

In questo caso l'andamento del grafico dipende dai coefficienti c_1 e c_2 delle equazioni. In particolare ci dice che nel caso in cui i segni siano discordi il grafico attraversa una volta il punto di equilibrio, compiendo un'oscillazione, nel caso in cui sono concordi invece si comporterà analogamente al moto smorzato. Il grafico 3.9 mostra bene questi due casi.



3.9 Risonanza

Nelle sezioni precedenti abbiamo visto come il moto armonico può essere influenzato da altre forze come l'attrito dell'aria, ma che succede se al nostro oscillatore viene applicata una nuova forza che dipende dal tempo periodica (Figura 3.10)?

Questo è il caso più generico che si possa supporre, e per trattarlo e poter affrontare l'equazione differenziale che descrive il nuovo moto occorre trovare un metodo per rappresentare $\vec{F}(t)$.

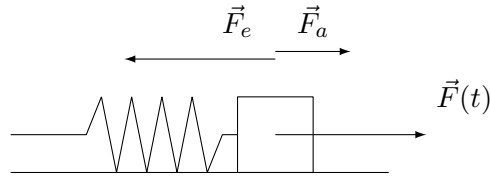
La legge dello sviluppo in serie di Fourier ci dice che qualunque funzione periodica può essere descritta come una somma di funzioni seno e coseno, per cui possiamo trattare il semplice caso in cui $|F(t)| = F \cos(\omega t)$, da cui poi ricaveremo alcune considerazioni del tutto generiche.

Scriviamo subito l'equazione del moto:

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = F \cos(\omega t)$$

Questa è un'equazione differenziale del second'ordine non omogenea. Per risolverla occorre applicare il teorema di struttura, ovvero trovare per

Figura 3.10: Schema del moto armonico forzato



tentativi una soluzione particolare, e poi sommarvi vettorialmente tutte le soluzioni generali di quella omogenea.

Le soluzioni dell'omogenea le abbiamo già viste nella sezione sul moto armonico smorzato, andiamo a trovare l'integrale particolare:

Consideriamo che $F(t)$ sia la parte reale del numero complesso

$$F [\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)] = F e^{i\omega t}$$

Ora possiamo cercare le soluzioni all'equazione differenziale in questa famiglia di funzioni: $x(t) \approx A e^{i\lambda t}$

$$\begin{aligned} x(t) &= A e^{i\lambda t} \\ \dot{x}(t) &= i\lambda A e^{i\lambda t} \\ \ddot{x}(t) &= -\lambda^2 A e^{i\lambda t} \end{aligned}$$

Mettendo la soluzione $x(t)$ nell'equazione differenziale troviamo che

$$e^{i\lambda t} (-\lambda^2 m A + i\beta \lambda A + k A) = F e^{i\omega t}$$

L'unica possibilità che questa equazione abbia soluzione è che $\lambda = \omega$. A questo punto possiamo semplificare i termini esponenziali da una parte e dall'altra e ottenere:

$$-\omega^2 m A + i\beta \omega A + k A = F$$

Ricaviamo da questo il valore dell'ampiezza A

$$A = \frac{F}{-\omega^2 m + i\beta \omega + k}$$

Per riportare A in una forma più comoda (con la i al numeratore) conviene moltiplicare numeratore e denominatore per il coniugato del denominatore (in questo modo avremo al denominatore un numero reale):

$$A = \frac{F}{k - \omega^2 m + i\beta \omega} \cdot \frac{k - \omega^2 m - i\beta \omega}{k - \omega^2 m - i\beta \omega} = \frac{F(k - \omega^2 m) - iF\beta \omega}{(k - \omega^2 m)^2 + \beta^2 \omega^2}$$

Ora A è un numero complesso di cui sappiamo calcolarci modulo e fase:

$$|A| = \sqrt{A_{reale}^2 + A_{imm.}^2} = \sqrt{\frac{F^2(k - \omega^2 m)^2 + F^2 \beta^2 \omega^2}{(k - \omega^2 m)^2 + \beta^2 \omega^2}}$$

$$|A| = F \cdot \sqrt{\frac{(k - \omega^2 m) + \beta^2 \omega^2}{[(k - \omega^2 m)^2 + \beta^2 \omega^2]^2}}$$

$$|A| = \frac{F}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2}}$$

La fase di A è altrettanto semplice

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\beta\omega}{k - m\omega^2}\right)$$

Approfittando della scrittura euleriana dei numeri complessi possiamo affermare che

$$A = |A|e^{i\varphi}$$

Ora possiamo scrivere la soluzione particolare della nostra equazione differenziale⁶:

$$x(t) = |A|e^{i\varphi}e^{i\omega t} = |A|e^{i(\omega t + \varphi)} = |A|[\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi)]$$

Poiché abbiamo supposto dall'inizio di prendere solo la parte reale della soluzione anche in questo caso dobbiamo escludere la parte immaginaria. L'equazione del moto finale diventa:

$$x(t) = \frac{F}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + \beta^2 \omega^2}} \cos(\omega t + \varphi)$$

Se mettiamo in evidenza una massa al denominatore e ricordando che la definizione della pulsazione del moto principale era $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ riscriviamo la formula $x(t)$ in questo modo:

$$x(t) = \frac{F}{m} \cdot \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\beta^2 \omega^2}{m^2}}} \cos(\omega t + \varphi) \quad (3.5)$$

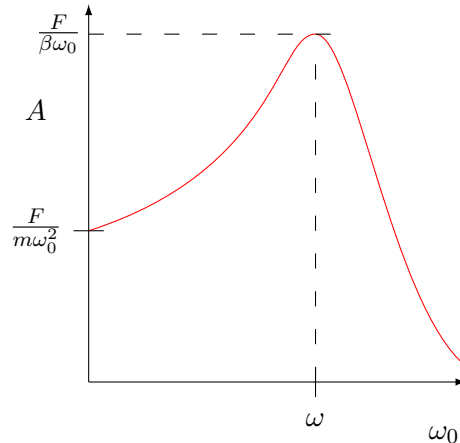
Il risultato sorprendente è che l'ampiezza massima del moto dipende dalle pulsazioni di entrambi i moti armonici, sia quello spontaneo che quello forzante, eseguendo uno studio di funzione dell'ampiezza su ω risulta che

⁶In realtà la soluzione particolare è l'unica che sia veramente interessante, perché le soluzioni generali si annullano dopo un tempo $t \approx 3\tau$, per cui per t superiore di un certo periodo il moto si stabilizza e diventa diretto totalmente dalla forza trainante

c'è un massimo proprio per $\omega = \omega_0$. Questo fenomeno prende il nome di **risonanza**.

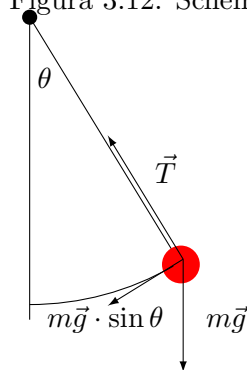
Una risonanza avviene quando due moti periodici si combinano con la stessa pulsazione, e si registra un picco dell'ampiezza del moto, come mostrato nella Figura 3.11.

Figura 3.11: Grafico dell'ampiezza in funzione della frequenza della forza periodica che modifica il moto armonico



3.10 Il pendolo

Figura 3.12: Schema del pendolo



La Figura 3.12 mostra come il moto del pendolo sia ottenuto grazie alla composizione di due forze: la tensione del filo e la forza peso.

Scomponendo la forza peso nelle sue componenti parallela e ortogonale al moto possiamo osservare che la tensione del filo si annulla con la componente della forza peso lungo parallela al raggio (perché la tensione è una forza di tipo vincolare)

Oltre alla forza di gravità la tensione del filo deve anche svolgere il compito di Forza centripeta, quindi scrivendo l'accelerazione del moto in forma vettoriale otteniamo che:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$$

Dove a_t è l'accelerazione tangenziale, ovvero la componente parrallela al moto della forza peso, mentre a_n è l'accelerazione normale al moto, quindi l'accelerazione centripeta, che è $\frac{v^2}{r}$ (vedi la formula 2.5).

$$\begin{cases} a_t = g \sin \theta \\ a_n = \frac{v^2}{L} \end{cases}$$

Dove L è la lunghezza del filo. Per cui possiamo scrivere subito l'equazione del differenziale del moto:

$$\begin{cases} -mg \sin \theta = m\ddot{x} \\ -mg \cos \theta + T = m\frac{\dot{x}^2}{L} \end{cases}$$

Poiché la tensione del filo ci è incognita conviene studiare il moto del pendolo a partire dalla prima equazione. Riconoscendo che $\theta = \frac{x}{L}$ Otteniamo che:

$$\ddot{x} + g \sin \frac{x}{L} = 0$$

Questa equazione differenziale è molto difficile da risolvere con i mezzi a disposizione dopo un corso di Analisi I, per cui dobbiamo approssimare usando i polinomi di Taylor.

Nel caso di angoli θ piccoli possiamo limitarci al polinomio di primo grado, che è una buona approssimazione, in quanto è sempre vero che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \approx x$$

Quindi per angoli piccoli le oscillazioni del pendolo vengono dette *isocrone*, e vale la seguente approssimazione:

$$\ddot{x} + \frac{g}{L}x = 0$$

Ma questa è l'equazione del moto armonico, la cui pulsazione ω_0 vale proprio $\sqrt{\frac{g}{L}}$. Conosciamo già la soluzione di questa equazione:

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Da questa formula sappiamo calcolare il periodo di oscillazione, che vale

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Abbiamo ottenuto un eccezionale informazione: Il periodo di oscillazione di un pendolo non dipende dalla massa dell'oggetto ne dall'ampiezza delle oscillazioni.

Tutto questo rimanendo nell'ipotesi delle piccole oscillazioni.

3.11 Oscillatori accoppiati

Abbiamo studiato i moti di molti tipi di oscillatori, è arrivata l'ora di mettere insieme più sistemi in oscillazione contemporaneamente:

Che moto hanno degli oggetti in fila, con stessa massa, collegati tra loro con delle molle di pari costante elastica (Figura 3.13)?

Figura 3.13: Oscillatori accoppiati



Immaginiamo per semplicità che il primo sia collegato con l'ultimo, e che quindi il sistema si trovi chiuso come in un cerchio di raggio molto grande, potendo quindi approssimare la curvatura del cerchio a zero.

Possiamo provare a scrivere l'equazione del moto dell' i -esima massa, che sarà qualcosa del tipo:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \vec{F}_i$$

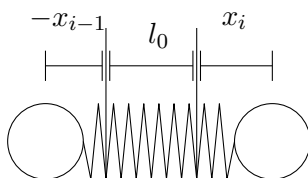
Dove x è lo spostamento immaginando di scegliere un sistema di riferimento dove la pallina è centrata rispetto alla posizione d'equilibrio delle due molle che la tirano.

Nella nostra rappresentazione la pallina subisce due forze, quella delle due molle su cui è attaccata. Dunque:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{i-1} + \vec{F}_i^{i+1}$$

Quindi proviamo a scrivere le forze che le due molle esercitano sulla pallina, supponiamo che la pallina $i - 1$ sia spostata di x_{i-1} dalla posizione di equilibrio della molla con cui è collegata all' i -esima pallina, l'allungamento totale della molla sarà l'allungamento della pallina $i - 1$, + la distanza di riposo l_0 + l'allungamento della i -esima pallina (Figura 3.14):

Figura 3.14: Schema delle forze che agiscono sulla pallina



Riassumiamo quanto detto in queste semplici formule, chiamiamo L la distanza tra le due palline

$$\vec{F}_i^{i-1} = -k(L_{i-1,i} - l_0)$$

Ma si evince dalla Figura 3.14 che $L_{i-1,i} = -x_{i-1} + l_0 + x_i$.

$$\vec{F}_i^{i-1} = k(x_{i-1} - x_i)$$

In maniera analoga si può studiare il comportamento della \vec{F}_i^{i+1} :

$$\vec{F}_i^{i+1} = F_i^{i+1} = k(x_{i+1} - x_i)$$

Da cui ricaviamo il valore di \vec{F}_i :

$$\begin{aligned}\vec{F}_i &= k(x_{i+1} - x_i) + k(x_{i-1} - x_i) \\ m\ddot{x}_i &= k(x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i)\end{aligned}$$

Questo è un sistema di equazioni differenziali, ora torna utile aver scelto una serie di masse collegate tutte tra loro, come se fossero disposte in cerchio. Questo perché altrimenti avremmo dovuto scegliere due nuove equazioni per descrivere il moto della prima e dell'ultima palla. In questo modo tutto è più semplice.

Cerchiamo al solito le soluzioni di questa equazione nella famiglia di funzioni:

$$x_i(t) = A_i e^{\lambda t}$$

Deriviamo due volte:

$$\ddot{x}_i(t) = A_i \lambda^2 e^{\lambda t}$$

Procediamo con i calcoli:

$$\begin{aligned}\lambda^2 A_i e^{\lambda t} &= \frac{k}{m} (A_{i+1} + A_{i-1} - 2A_i) e^{\lambda t} \\ \lambda^2 A_i &= \frac{k}{m} (A_{i+1} + A_{i-1} - 2A_i) \\ A_{i+1} + A_{i-1} - \left(2 + \lambda^2 \frac{m}{k}\right) A_i &= 0\end{aligned}\tag{3.6}$$

Perché il sistema ammetta soluzione il determinante della trasformazione lineare associata a questo sistema deve essere nullo. In altre parole potremo risolvere il sistema scrivendo la matrice associata M e poi imporre il determinante di questa matrice pari a 0.

Ora la matrice M avrà un 1 per ogni riga corrispondente ad $i-1$ e $i+1$ (Coefficienti di A_{i+1} e A_{i-1}) e il valore $-(2 + \lambda^2 \frac{m}{k})$ per ogni i :

$$\det \begin{pmatrix} -(2 + \lambda^2 \frac{m}{k}) & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & -(2 + \lambda^2 \frac{m}{k}) & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -(2 + \lambda^2 \frac{m}{k}) \end{pmatrix} = 0$$

Siccome calcolare il determinante di questa matrice può risultare noioso useremo una scorciatoia, che può essere usata tutte le volte che abbiamo a che fare con sistemi dalla simmetria traslazionale⁷.

Questo teorema è noto come il *teorema di Bloch*, e afferma che le soluzioni A_i del sistema sono del tipo

$$A_i = A_0 e^{jpi}$$

Dove A_0 è un numero che indica l'intensità della forza, $j = \sqrt{-1}$ (coefficiente immaginario) e p è un fattore moltiplicativo che identifica assieme a i la nostra incognita A_i .

Scriviamo nuovamente la formula 3.6 dopo aver calcolato questa soluzione.

$$A_0 e^{jp(i+1)} + A_0 e^{jp(i-1)} = A_0 e^{jpi} \cdot \left(2 + \lambda^2 \frac{m}{k}\right)$$

$$e^{jpi} e^{jp} + e^{jpi} e^{-jp} = 2e^{jpi} + \lambda^2 \frac{m}{k} e^{jpi}$$

$$\frac{e^{jp} + e^{-jp}}{2} = 1 + \frac{\lambda^2 m}{2k}$$

Riconosciamo nell'espressione a sinistra la formula di Eulero del coseno, e completiamo l'equazione:

$$\cos(p) - 1 = \frac{\lambda^2 m}{2k}$$

$$\frac{2k}{m} \cdot (\cos(p) - 1) = \lambda^2$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{2k}{m}} \cdot \sqrt{\cos(p) - 1}$$

Poiché $\cos(p) - 1$ è sempre un numero negativo, risulta che λ è un numero complesso. Ricordiamo le formule di bisezione del seno e del coseno:

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \quad \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

Possiamo quindi procedere avanti per semplificare ulteriormente la soluzione.

$$\lambda = j \sqrt{\frac{1 - \cos(p)}{2}} \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

$$\lambda = j \sin\left(\frac{p}{2}\right) \cdot 2 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

⁷I sistemi simmetrici traslazionali sono quelli che effettuando una traslazione rimangono uguali, come in questo caso

Possiamo quindi pensare $\lambda(p)$ come una funzione reale di p , e considerare per comodità $\lambda = j\lambda(p)$.

Riscriviamo la soluzione del moto:

$$x_i(t) = A_i e^{\lambda t} = A_0 e^{jp_i} \cdot e^{j\lambda(p)t}$$

In tutto questo dobbiamo ancora scoprire qual è il significato della variabile p . Per far questo ci avvarremo di una supposizione fatta all'inizio, ovvero che l'ultima massa è collegata alla prima, come se fossero in una circonferenza infinita. Quindi vale la relazione:

$$A_{N+1} = A_1$$

Procediamo a calcolare p .

$$e^{jp(N+1)} = e^{jp}$$

$$e^{jpN} e^{jp} = e^{jp}$$

$$e^{jpN} = 1$$

$$\cos(pN) + i \sin(pN) = 1$$

$$pN = 2n\pi \quad p = \frac{2\pi}{N} \cdot n$$

Quindi p è una successione di n , dove $n = 1, 2, 3, \dots, N$. Possiamo quindi considerare la funzione $\lambda[p(n)]$ come funzione diretta di n :

$$x_i(t) = A_0 e^{j\frac{2\pi}{N}ni} \cdot e^{j\lambda(n)t}$$

$$\lambda(n) = 2\omega_0 \sin\left(\frac{\pi}{N}n\right)$$

Abbiamo appena trovato che il moto di questo sistema di oggetti dipende da un numero N di stati espressi dalla variabile discreta n , per $n = N$ il sistema è fermo (stato di equilibrio), per $n = 1$ abbiamo una perturbazione che si propaga come un'onda attraverso tutti i corpi. Affronteremo meglio in seguito il moto ondulatorio, per ora ci siamo limitati a risolvere anche le equazioni di questo moto.

Capitolo 4

Il lavoro e l'energia

L'esperienza empirica ci mostra che esistono modi per poter moltiplicare l'intensità di una forza: Possiamo pensare ad una leva, o ad un torchio idraulico. Questi particolari oggetti ci consentono di moltiplicare una forza per spostare facilmente oggetti molto pesanti.

Ma lo spostamento che ne risulta è una frazione di quello che avremmo ottenuto senza adoperare la leva: Infatti si dimostra empiricamente che

$$\Delta x \cdot F = cost$$

Può risultare utile introdurre un nuovo ente per descrivere questa quantità.

Definizione 10 *Si definisce il **lavoro** meccanico prodotto da una forza come il prodotto scalare di una forza con lo spostamento. L'unità di misura del lavoro è il Joule.*

$$L = \Delta \vec{R} \cdot \vec{F}$$

Se lo spostamento non è lineare, o la forza cambia con la direzione è più utile definire il lavoro con un integrale:

$$L = \int_{R_1}^{R_2} \vec{F}(\vec{R}) \cdot d\vec{R}$$

Quindi il lavoro in maniera generale dipende dal percorso. In particolare definiamo il lavoro compiuto da una forza per spostare un corpo da un punto A ad un punto B dello spazio come

$$L_{\widehat{AB}} = \int_{\widehat{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{R}$$

4.1 Lavori delle forze

Analizziamo adesso il lavoro compiuto dalle forze più comuni con cui ci siamo confrontati nei paragrafi precedenti, in particolare:

1. Forza peso: $\vec{F}(\vec{R}) = Mg(0, 0, -1)$
2. Forza elastica: $\vec{F}(\vec{R}) = -k(x, 0, 0)$

4.1.1 Lavoro della forza elastica

Il lavoro fatto da una forza per spostare una molla dalla sua posizione di equilibrio è molto semplice. Lo spostamento è unidimensionale.

$$\begin{aligned}L_{0,A} &= \int_0^A \vec{F} \cdot d\vec{R} = \int_0^A -k(x, 0, 0) \cdot d\vec{R} = \\ &= - \int_0^A kx \, dx = \left[-\frac{1}{2}kx^2 \right]_0^A \\ L_{0,A} &= -\frac{1}{2}kA^2\end{aligned}$$

4.1.2 Lavoro della forza peso

Il lavoro fatto da una forza per sollevare un oggetto è pari a:

$$\begin{aligned}L_{h_1,h_2} &= \int_{h_1}^{h_2} mg(0, 0, -1) \cdot d\vec{R} = \int_{h_1}^{h_2} mg \, dz = [mgz]_{h_1}^{h_2} \\ L_{h_1,h_2} &= mg(h_2 - h_1) = mg\Delta h\end{aligned}$$

4.2 Teorema delle Forze vive

Proviamo a inserire le leggi della dinamica all'interno della definizione di Lavoro.

$$\begin{cases} L_{AB} = \int_{\widehat{AB}} \vec{F} \cdot d\vec{R} \\ \vec{F} = m\vec{a} \end{cases}$$
$$L_{AB} = \int_{\widehat{AB}} m\vec{a} \cdot d\vec{R} = m \int_{\widehat{AB}} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{R}$$

A questo punto consideriamo dt uno scalare e barriamo un po' con i differenziali

$$L_{AB} = m \int_A^B d\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = m \int_A^B \vec{v} \cdot d\vec{v}$$

In questo caso è utile ricorrere alla scrittura per coordinate per integrare, svolgiamo il prodotto scalare tra $\vec{v} \cdot d\vec{v}$.

$$L_{AB} = m \int_A^B (v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z)$$

Infine riconosciamo le primitive

$$L_{AB} = \left[m \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{2} \right]_A^B = \left[\frac{1}{2} m |v|^2 \right]_A^B$$

Da cui segue che

$$L_{AB} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

Questo risultato è molto interessante. Ci dice infatti che il lavoro fatto per spostare un oggetto da un punto A al punto B è proporzionale alla differenza dei quadrati delle velocità in A e in B , indipendentemente dal percorso fatto¹.

Vale la pena di definire un nuovo tipo di lavoro detto *Energia Cinetica*

Definizione 11 *Si definisce **Energia Cinetica** K di un corpo in questo modo.*

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

Con questa nuova definizione è possibile ridefinire il lavoro in maniera molto conveniente:

$$L_{AB} = K_B - K_A$$

Questo risultato eccezionale vale anche nel caso di campi di forze non conservativi, in quanto abbiamo dedotto questo risultato solo utilizzando la definizione di lavoro e la seconda legge della dinamica.

4.3 Forze conservative

Si è visto come alcune forze come la forza peso generano un lavoro che non dipende dal particolare percorso che si compie per passare da un punto A ad un punto B .

Queste si chiamano forze conservative, e sono particolarmente importanti nello studio della fisica.

Definizione 12 *Si definisce **conservativa** una forza il cui lavoro dipende esclusivamente dal punto di partenza e dal punto di arrivo.*

$$L_{AB} = L(B) - L(A)$$

¹Questo risultato è sensazionale, perché vale anche nel caso delle forze non conservative

Da questa definizione ne segue subito un'altra, del tutto equivalente.

Una forza è conservativa se e solo se il lavoro lungo qualunque tracciato chiuso compiuto dalla forza è nullo:

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

Infatti se il lavoro non dipende dal particolare percorso il lavoro fatto per andare da A a B è uguale e contrario a quello fatto per andare da B ad A. Quindi qualunque percorso che parte da A e finisce in A ha un lavoro nullo.

Entrambi queste proprietà sono estremamente difficili da verificare, bisognerebbe infatti trovare tutti i lavori per tutti i percorsi chiusi che sono infiniti. Per fortuna esiste un modo per capire se una forza è conservativa studiandone le caratteristiche locali, ovvero come si applica la forza in ciascun punto.

Possiamo considerare il differenziale $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ come un unico differenziale usando l'accortezza di chiamarlo δL per ricordarci che:

$$\int_A^B \delta L \neq L(B) - L(A)$$

Quindi $\delta L = dL$ implica che la forza è conservativa. Il problema di trovare se una forza è conservativa si riduce quindi a trovare il differenziale dL se esiste. Per convenzione questo differenziale prende il nome di $-dV$:

$$dV = -\vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (4.1)$$

Come si trova $V(\vec{r})$?

$$V(\vec{r}) = V(x, y, z)$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

$$-\vec{F} \cdot d\vec{r} = -F_x dx - F_y dy - F_z dz$$

Ricordando che $dV = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$ risulta che:

$$\begin{cases} F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \\ F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \\ F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \end{cases}$$

Ora siamo pronti per dare una nuova definizione di forza conservativa. Una definizione che ci consente facilmente di capire se una forza è conservativa o meno:

Definizione 13 Una forza è **conservativa** se esiste sempre il differenziale $\frac{\partial V}{\partial \alpha}$ tale che:

$$F_\alpha = -\frac{\partial V}{\partial \alpha} \quad \alpha = x, y, z$$

Per riscrivere questa definizione in maniera più compatta introduciamo un vettore chiamato gradiente:

Definizione 14 Si definisce **gradiente** di un vettore, un vettore che ha per componenti i differenziali del vettore di partenza e si indica con ∇v :

$$\nabla f \doteq \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Ora possiamo riscrivere la definizione precedente in maniera più compatta ancora. Una forza è conservativa se e solo se:

$$\exists \vec{V}(\vec{r}) \mid \vec{F} = -\nabla V$$

Questa condizione è molto utile per determinare se le forze elementari sono o meno conservative. Proviamo ad analizzare alcune forze:

1. Forza peso: $\vec{F} = (0, 0, -mg)$ $d\vec{V} = (0, 0, \frac{\partial F_z}{\partial z})$. La forza peso è una forza conservativa poiché esiste ed è facile calcolare il gradiente di \vec{F} : $\vec{\nabla} F = (0, 0, mgz)$.
2. Forza elastica: $\vec{F} = (-kx, 0, 0)$ $d\vec{V} = (\frac{\partial F_x}{\partial x}, 0, 0)$. Anche la forza elastica è conservativa poiché esiste ed è facile trovare il gradiente di \vec{F} : $\vec{\nabla} F = (\frac{1}{2}kx^2, 0, 0)$
3. Forza generica: $\vec{F} = (xy, 0, 0)$. Non è conservativa poiché $\frac{\partial V}{\partial y} = 0$ implica che nella formula non può apparire y , mentre y appare in F_x .

Come si può notare questo metodo può risultare scomodo quando le Forze con cui abbiamo a che fare non sono semplici, e determinare l'integrale può essere molto difficile.

Per fortuna possiamo continuare con i calcoli per trovare una nuova definizione di forze conservative che ci semplifichi ulteriormente il conto.

Per far questo dobbiamo avvalerci del *Teorema di Schwarz* che riporto qui:

Teorema 1 Di una funzione a più variabile è sempre vero che:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x}$$

Purché esistano queste derivate parziali.

A questo punto possiamo sviluppare un po' l'espressione del teorema:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)$$

Ricordiamo la definizione 13 e ricaviamo che:

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

Analogamente lo stesso ragionamento può essere fatto per tutte le coppie di coordinate (x, y) , (x, z) , (y, z) e otteniamo le seguenti equivalenze.

Se una forza è conservativa valgono le seguenti uguaglianze:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}$$

In questo modo abbiamo ricondotto il problema di integrare una forza a quello di derivarla, che è sempre possibile e molto più semplice.

Ma perché fermarci qui? Possiamo infatti scrivere tutte queste uguaglianze in maniera molto compatta, basta definire un vettore $\vec{\nabla}$ in questo modo:

Definizione 15 (Operatore Nabla) *Definisco un vettore **nabla** $\vec{\nabla}$ in questo modo:*

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

A questo punto possiamo davvero scrivere l'ultima definizione: Una forza è conservativa quando:

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Diamo un nome a questo prodotto vettoriale che ha l'importantissima caratteristica di indicare quando una forza è conservativa

Definizione 16 *Si definisce **rotore** di una forza il prodotto interno:*

$$\vec{\nabla} \times \vec{F}$$

Diamo quindi l'ultima definizione di forze conservative:

Definizione 17 *Una forza è **conservativa** quando il rotore della forza è nullo:*

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = 0$$

4.4 La conservazione dell'energia meccanica

Nelle precedenti sessioni abbiamo dimostrato che se un oggetto è soggetto ad un campo di forza conservativo il lavoro fatto per spostarsi da un punto

A al punto B non dipende dal percorso. Inoltre è sempre possibile definire un *potenziale* della forza V tale che:

$$L_{AB} = V_A - V_B$$

Combinando questa relazione con il teorema delle forze vive (sezione 4.2) otteniamo che

$$L_{AB} = K_B - K_A = V_A - V_B$$

$$K_B + V_B = K_A + V_A$$

Siamo giunti ad un altro importante traguardo. In un campo di forze conservativo la somma di energia cinetica e potenziale è una costante indipendentemente dalla posizione. Chiamiamo questa quantità costante *energia meccanica* del sistema: E_t .

Teorema 2 (Conservazione dell'energia meccanica) *Si definisce **energia meccanica** di un sistema come la somma di energia cinetica e potenziale in un punto.*

In caso in cui tutte le forze che agiscono in quel punto siano conservative questa si conserva.

$$E_T = V_A + K_A = \text{cost.}$$

Questa relazione è molto comoda per trovare le velocità degli oggetti in quanto esprime la velocità in funzione della posizione. Per dimostrarne la validità a partire dalla conservazione dell'energia cinetica dedurremo la seconda legge di Newton.

$$\frac{1}{2}mv^2 + V(\vec{r}) = E_t$$

Deriviamo tutto rispetto alla posizione:

$$\frac{d}{d\vec{r}} \left(\frac{1}{2}mv^2 \right) + \frac{dV}{d\vec{r}} = 0$$

Ricordiamo l'equazione 4.1 ($dV = -\vec{F} \cdot d\vec{r}$):

$$\frac{1}{2}m \frac{d}{d\vec{r}} v^2 - \vec{F} = 0$$

$$\frac{1}{2}m \left(2v \frac{dv}{d\vec{r}} \right) = \vec{F}$$

Magheggio: ricordiamo che $v = \frac{d\vec{r}}{dt}$ per semplificare $d\vec{r}$:

$$m \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{d\vec{v}}{d\vec{r}} = \vec{F}$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

Abbiamo ricavato la seconda legge di Newton semplicemente derivando in $d\vec{r}$ la conservazione dell'energia. Questa è un'ulteriore conferma della sua validità.

4.5 Campi di forze centrali

Abbiamo analizzato fino ad ora solo campi di forze relativamente semplici, come la forza peso che è costante in ogni punto, o la forza elastica, che ha un comportamento unidimensionale.

Un campo di forze centrale definisce una particolare forza il cui modulo dipende esclusivamente dalla distanza del corpo da un punto, e la cui direzione è sempre radiale rispetto a questo punto che chiamiamo centro.

Definizione 18 *Si definisce una forza di tipo **centrale** una qualunque forza il cui modulo dipende dalla distanza da un punto Ω e la cui direzione è radiale rispetto a Ω :*

$$F(\vec{r}) = \pm f(|\vec{r}|)\hat{r}$$

Tutte le forze principali della fisica da cui derivano tutte le altre sono di tipo centrale. Si può dimostrare che se una forza è centrale, allora è anche conservativa. Per far questo basta dimostrare che il rotore della forza $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ sia nullo.

Iniziamo con il calcolare alcune derivate parziali della forza:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(r)x = x \frac{\partial}{\partial y} f(r) = x \frac{df}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial y}$$

Ricordiamo che r è il modulo del raggio, e può essere scritto come $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Approfittiamone e riscriviamo l'equazione

$$x \frac{df}{dr} \cdot \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial y} = x \frac{df}{dr} \cdot \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{df}{dr} \cdot \frac{xy}{r}$$

A questo punto si vede facilmente che il rotore della forza è nullo infatti

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{df}{dr} \cdot \frac{xy}{r} = \frac{df}{dr} \cdot \frac{yx}{r} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$$

Lo stesso calcolo può essere fatto per tutte le altre derivate parziali, abbiamo quindi che

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0}$$

Quindi le forze centrali sono conservative.

Saremmo potuti arrivare alla stessa conclusione in maniera meno rigorosa e più intuitiva dicendo che, poiché la forza è sempre diretta radialmente,

il lavoro fatto per spostarsi lungo circonferenze che hanno centro in Ω è nullo (Poiché lo spostamento è perpendicolare alla forza). Quindi il lavoro dipende solo dalla componente radiale della distanza, riconducendoci ad un caso unidimensionale, molto più semplice da studiare. Infatti qualunque percorso per andare da un punto A ad un punto B posso considerarlo come somme di parti radiali e parti tangenziali. Poiché le uniche a compiere lavoro sono le parti radiali il lavoro non dipende dal particolare percorso fatto, ma solo dallo spostamento radiale. In altre parole:

$$L_{AB} = V[r(A)] - V[r(B)]$$

Capitolo 5

Gravitazione universale, Leggi di Keplero e orbite planetarie

Storicamente le osservazioni astronomiche condotte tra il XVI e il XVII secolo portarono alcuni scienziati a studiare il moto dei pianeti attorno al sole.

I risultati di questi studi sono riassunti nelle tre *leggi di Keplero*, ricavate empiricamente solo dall'osservazione dei pianeti:

1. I pianeti compiono orbite ellittiche di cui il sole è un fuoco.
2. La velocità areolare dei pianeti è costante (il raggio vettore che ha origine nel sole e punta il pianeta spazza aree uguali in tempi uguali).
3. In pianeti orbitanti rispetto allo stesso sole il cubo del semiasse maggiore dell'orbita è proporzionale ai quadrati dei periodi.

Nel XVII secolo il lavoro dei padri della fisica fu quello di riuscire a determinare le leggi che sono alla base di questi moti. La grande intuizione di Newton fu quella di capire che la forza che fa cadere la mela sulla Terra è la stessa che spinge la Luna ad orbitarci intorno, e la stessa che porta tutti i pianeti a piroettare intorno al Sole.

5.1 La Forza di gravità

Ripercorrendo il ragionamento di Newton è possibile confrontare l'accelerazione con cui la Terra attrae la Luna, con quella della mela.

L'accelerazione con cui la Terra attrae la Luna è l'accelerazione centripeta (approssimando l'orbita lunare ad una circonferenza). Essendo nota

la distanza della Luna e il Raggio Terrestre Newton scoprì che:

$$a_L = \frac{v^2}{R_{TL}} = \frac{\left(\frac{2\pi R_{TL}}{T_L}\right)^2}{R_{TL}} = \frac{4\pi^2 R_{TL}}{T_L^2}$$

Scoprì quindi che $\left(\frac{g}{a_L}\right) \approx 3600$, e poiché $\left(\frac{R_{TL}}{R_T}\right)^2 \approx 3600$ ne dedusse che l'accelerazione prodotta dalla forza andasse come

$$a \sim \frac{1}{r^2} \quad f \sim \frac{1}{r^2}$$

Dal terzo principio della dinamica possiamo ricavare anche un'altra informazione importante. Infatti non c'è nessuna ragione per credere che come la terra attrae la Luna la luna non possa attrarre la terra verso di se. Quindi abbiamo una coppia di forze: la forza $F_{T(L)}$ che è la forza con cui la Terra attrae la Luna, e la forza $F_{L(T)}$ che è la forza con cui la Luna attrae la Terra, uguale in modulo e di verso opposto.

$$F_{T(L)} = a \cdot \frac{M_L}{R_{TL}^2} \quad F_{L(T)} = b \cdot \frac{M_T}{R_{LT}^2}$$

Poiché queste forze sono uguali la forza deve avere la forma seguente:

$$F_G \sim \frac{M_L \cdot M_T}{R_{TL}^2}$$

Quindi completiamo questa relazione introducendo la costante di gravitazione universale G nella formula, che serve per portare le misure nel sistema M K S:

$$\vec{F} = -G \cdot \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r} \quad (5.1)$$

La forza della formula (5.1) è nota come **Forza di Newton**, o legge della gravitazione universale.

5.2 Il teorema di Gauss

In tutto il ragionamento fatto precedentemente abbiamo trascurato un dettaglio molto importante: abbiamo considerato la Terra come un punto materiale, il che non è proprio una buona approssimazione, in quanto rispetto alla distanza con la mela il raggio terrestre non è affatto trascurabile, anzi...

Per fortuna non abbiamo sbagliato, infatti esiste un teorema molto utile che ci dice che qualunque massa di distribuzione sferica è bene approssimabile ad un punto con tutta la massa concentrata su di se.

Per dimostrare questa asserzione ci avvarremo della definizione di flusso di una forza e del teorema di Gauss.

Definizione 19 Si definisce il **Flusso** di un campo di una forza $\phi_{\Omega}(\vec{F})$ su una superficie chiusa Ω in questo modo:

$$\phi_{\Omega}(\vec{F}) \doteq \int_{\Omega} \vec{G}(\vec{r}) \cdot \hat{n} \, d\Omega$$

Dove $\vec{G}(\vec{r})$ è il valore del campo della forza.

In poche parole il flusso di una forza attraverso alla superficie è il prodotto scalare tra la forza stessa ed un versore normale alla superficie moltiplicato per la superficie stessa.

Teorema 3 Il teorema di Gauss afferma che se il campo di forze è del tipo:

$$\vec{G}(\vec{r}) = c \cdot \frac{1}{r^2} \hat{r}$$

Allora il flusso lungo qualunque superficie chiusa è pari a

$$\phi_{\Omega}(\vec{G}) = 4\pi c$$

Dove c è una costante qualunque

Il teorema di Gauss riveste una importanza enorme nello studio dei campi di forze perché della forma $F \sim \frac{1}{r^2}$ sono due delle forze elementari della fisica: l'interazione gravitazionale e l'interazione elettromagnetica.

Applichiamo adesso il teorema di Gauss nel caso di una distribuzione sferica uniforme che bene approssima la terra.

Come si vede in Figura 5.1 se scegliamo una superficie sferica esterna alla sfera a cui applicare il teorema di Gauss, e vogliamo calcolarne il flusso, in ogni elemento di superficie $d\Omega$ il campo di forze è parallelo al vettore normale alla superficie. Questo perché il sistema è dotato di simmetria cilindrica (La forza non deve mutare per qualunque rotazione attorno all'asse che congiunge il centro della sfera al punto in cui è applicata la forza sulla superficie Ω).

$$\phi_{\Omega}(\vec{F}) = \int_{\Omega} \vec{F} \cdot \hat{n} \, d\Omega = Gm_1m_24\pi$$

Ma la forza è parallela alla normale della sfera

$$Gm_1m_24\pi = \int_{\Omega} F \, d\Omega$$

Per simmetria F è costante in modulo in tutti i punti della superficie Ω .

$$Gm_1m_24\pi = F \int_{\Omega} d\Omega$$

Ricordiamo che Ω è una sfera, la cui superficie è $4\pi r^2$

Superficie Ω sferica

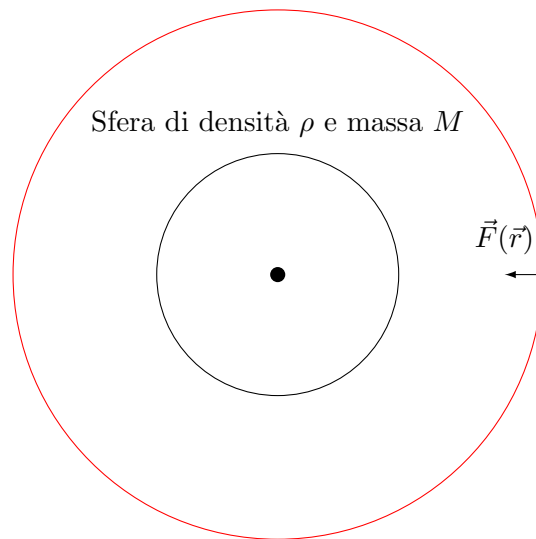


Figura 5.1: La forza sferica, e la superficie di Gauss, scelta sferica per convenienza

$$Gm_1m_24\pi = F4\pi r^2$$

Da qui possiamo ricavare F :

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Abbiamo ottenuto un risultato fantastico: le superfici a distribuzione sferica si comportano esattamente come corpi puntiformi. Ecco giustificato il fatto di aver approssimato la terra ad una massa puntiforme.

5.3 Orbite dei pianeti

Nell'introduzione di questa sezione sono state enunciate le tre leggi di Keplero. L'astronomo tedesco derivò queste leggi dalla propria esperienza e dai dati ottenuti dalle osservazioni, l'impresa di Newton e di altri grandi fisici del XVII secolo fu quello di ricavarli a partire dalle leggi della dinamica (e vice versa).

Adesso ricaveremo le leggi di Keplero dalle leggi che abbiamo studiato fino ad ora.

Nel caso della prima legge le cose sono un po' complesse, per cui ci limiteremo a fornirne una dimostrazione senza calcolare direttamente le traiettorie dei pianeti per non complicare troppo le cose.

Tuttavia per arrivare a questo risultato è necessario affrontare il problema dell'interazione tra due corpi (noto come problema dei due corpi) e di trovare un sistema di riferimento conveniente per descrivere la dinamica di due oggetti con interazioni reciproche (come nel caso dei pianeti in orbita attorno al Sole).

5.3.1 Problema dei due corpi

Studiare la dinamica di due corpi¹ che si muovono liberi nello spazio può essere molto complesso, infatti ogni corpo ha tre gradi di libertà (uno per coordinata).

Possiamo però scegliere un intelligente sistema di riferimento con cui studiare agevolmente questo sistema.

Per farlo scegliamo due vettori: \vec{r} , la distanza tra i due corpi, e \vec{R} , il *centro di massa*.

Definiamo subito cosa si intende per centro di massa, anche se ne rimandiamo lo studio attento al capitolo sulla fisica dei sistemi.

¹Approssimiamo i corpi a punti materiali

Definizione 20 Si definisce centro di massa il vettore \vec{R} che è la media pesata sulle masse di n corpi:

$$\vec{R} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$$

In questo caso di due corpi il centro di massa è semplicemente

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Avendo definito \vec{r}_1 e \vec{r}_2 come le posizioni nello spazio dei due corpi.

Si può notare subito che se $m_1 \gg m_2$ il centro di massa coincide con la posizione del corpo 1.

Esprimiamo ora l'energia totale del sistema:

$$E = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_2^2 + V(\vec{r}_1) + V(\vec{r}_2)$$

Trasformando tutto in nel nuovo sistema di riferimento otteniamo la nuova formula dell'energia. Per far questo usiamo $M = m_1 + m_2$.

$$\begin{cases} r_1 = \vec{R} + \frac{m_2}{M} \vec{r} \\ r_2 = \vec{R} - \frac{m_1}{M} \vec{r} \end{cases}$$

Deriviamo per ottenere le velocità:

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = \dot{R} + \frac{m_2}{M} \dot{r} \\ \dot{r}_2 = \dot{R} - \frac{m_1}{M} \dot{r} \end{cases}$$

Sostituiamo all'interno della precedente formula dell'energia, ricordandoci che il potenziale è definito a partire dalla distanza delle due particelle (e quindi dipende solo da \vec{r} e non più dalle posizioni singole dei corpi):

$$E = \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{R} + \frac{m_2}{M} \dot{r} \right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{R} - \frac{m_1}{M} \dot{r} \right)^2 + V(\vec{r})$$

$$E = \frac{1}{2} m_1 \left(\dot{R}^2 + \frac{m_2^2}{M^2} \dot{r}^2 + \frac{2m_2 \dot{R} \dot{r}}{M} \right) + \frac{1}{2} m_2 \left(\dot{R}^2 + \frac{m_1^2}{M^2} \dot{r}^2 - \frac{2m_1 \dot{R} \dot{r}}{M} \right) + V(\vec{r})$$

Mettiamo a fattor comune i termini che moltiplicano \dot{R}^2 e notiamo che i termini dei doppi prodotti dei quadrati si semplificano, quindi l'espressione diventa:

$$E = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \dot{R}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{m_1 m_2^2}{M^2} + \frac{m_2 m_1^2}{M^2} \right) \dot{r}^2 + V(\vec{r})$$

$$E = \frac{1}{2} M \dot{R}^2 + \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{M} (m_1 + m_2) \dot{r}^2 + V(\vec{r})$$

$$E = \frac{1}{2}M\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{M}\dot{r}^2 + V(\vec{r})$$

Si nota subito che la nuova energia è composta da tre termini. Il primo è facilmente riconoscibile: è l'energia cinetica associata al moto del centro di massa, come se tutta la massa del sistema fosse associata in quel punto. Il secondo è un termine che vale la pena studiare. Per farlo diamo un'altra definizione:

Definizione 21 *Si definisce la massa ridotta di un sistema di corpi come:*

$$\mu = \frac{\prod_{i=1}^n m_i}{\sum m_i}$$

Anche qui si nota che nel caso in cui $m_1 \gg m_2$ $\mu \rightarrow m_2$. Quindi il secondo termine è un'altra energia cinetica:

$$E = \frac{1}{2}M\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V(\vec{r})$$

Infine abbiamo un'energia potenziale che dipende dalla distanza reciproca dei due corpi.

Per studiare il moto dei pianeti attorno al sole possiamo partire dalle approssimazioni seguenti:

$$\begin{aligned} m_1 &\gg m_2 \\ R &\approx r_1 \\ \mu &\approx m_2 \end{aligned}$$

Avendo scelto m_1 la massa del sole e m_2 la masse del pianeta.

Per comodità scegliamo l'origine del nostro sistema di riferimento fissa nel sole. In questo caso la velocità del centro di massa è nulla, quindi si annulla tutto il primo termine. La nuova formula dell'energia diventa quindi:

$$E = \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + V(r)$$

Ricordiamoci sempre che la forza che attira il pianetino verso il sole è una forza centrale, quindi si conserva il momento angolare (vedi la sezione 3.3).

Andiamoci a calcolare \dot{r} .

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d}{dt}(r \cdot \hat{u}_r) \\ \vec{v} &= \frac{dr}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r} \end{aligned}$$

Calcoliamoci il momento della quantità di moto:

$$\vec{J} = \vec{r} \times \mu(\dot{r} \cdot \hat{u}_r + \vec{\omega} \times \vec{r})$$

Il primo prodotto è nullo poiché il prodotto vettoriale tra il raggio e il versore lungo il raggio è pari a 0.

$$\vec{J} = \vec{r} \times \mu (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Passiamo alla notazione scalare, e abbiamo ottenuto i seguenti risultati²:

$$J = \mu\omega r^2$$

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + \omega^2 r^2}$$

Sostituiamo la velocità nella formula dell'energia (in quel caso \dot{r} era inteso $\frac{d\vec{r}}{dt}$).

$$E = \frac{1}{2}\mu v^2 + V(\vec{r})$$

$$E = \frac{1}{2}\mu (\dot{r}^2 + \omega^2 r^2) + V(r)$$

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{1}{2}r^2\mu\omega^2 + V(r)$$

Ricordiamoci che $J = \mu\omega r^2$ e quindi scriviamo:

$$E = \frac{1}{2}\mu \dot{r}^2 + \frac{J^2}{2\mu r^2} + V(r)$$

Poiché J e μ sono costanti il secondo termine che abbiamo trovato dipende esclusivamente da r , perciò rappresenta un nuovo tipo di energia potenziale³.

Possiamo quindi racchiudere gli ultimi due termini in un unico potenziale, che chiamiamo **potenziale efficace**.

Definizione 22 *Il potenziale efficace di due corpi che interagiscono l'uno con l'altro è dato dalla somma del potenziale gravitazionale con il termine $\frac{J^2}{2\mu r^2}$:*

$$V_{eff} = V(r) + \frac{J^2}{2\mu r^2}$$

Sostituendo a $V(r)$ la formula del potenziale gravitazionale possiamo graficare il potenziale efficace, ottenendo informazioni importantissime sull'orbita dei pianeti.

Il disegno in Figura 5.2 mostrato rappresenta la graficazione del potenziale efficace:

²La velocità è somma vettoriale di due componenti ortogonali tra loro, per cui si ricava il modulo con il teorema di pitagora

³dipende solo dalla distanza tra le particelle

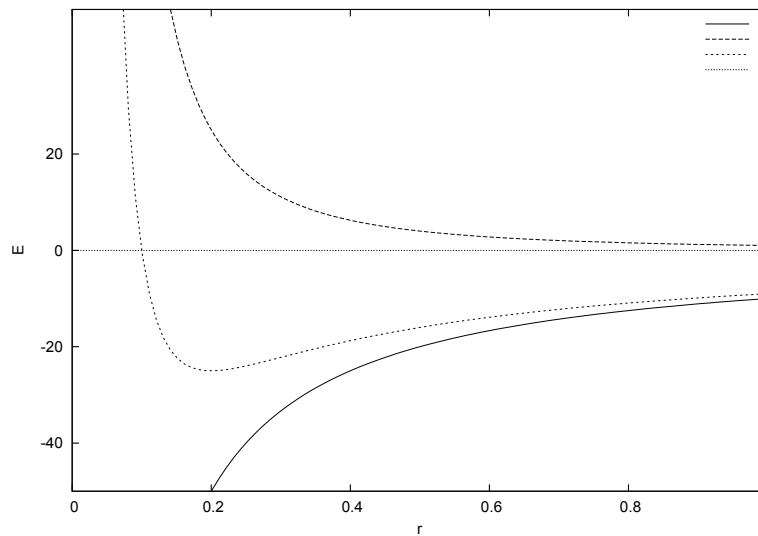


Figura 5.2: Il potenziale efficace (in mezzo) ottenuto come somma di potenziale gravitazionale (in basso) e del termine $V'(r) = \frac{J^2}{2\mu r^2}$ (in alto)

5.3.2 Dedurre le orbite dal grafico del potenziale efficace

Nel grafico del potenziale efficace di Figura 5.2 sono rappresentati il potenziale gravitazionale $V(r) = -G\frac{m_1 m_2}{r}$ e l'altro termine $V'(r) = \frac{J^2}{2\mu r^2}$ e la loro somma V_{eff} .

L'energia totale del sistema è data dalla somma di potenziale efficace ed energia cinetica radiale. Poiché l'energia totale si conserva, a partire da una energia iniziale nota, siamo in grado di calcolare sempre il valore dell'energia cinetica radiale, perché l'andamento del potenziale efficace è noto.

In particolare tracciando una retta orizzontale sul grafico che rappresenta un valore costante dell'energia totale del sistema possiamo dire che l'intervallo di raggi possibile sono solo quelli in cui la curva del potenziale efficace si trova sotto la retta dell'energia totale, infatti non è possibile avere un valore negativo dell'energia cinetica⁴.

Dallo studio del potenziale efficace quindi possiamo ricavare quali sono i livelli energetici accettabili. Dalla Figura 5.2 si vede che questo ha un minimo. Da questo deduciamo che l'energia totale del sistema non può mai essere inferiore a questo minimo.

Chiamiamo r_0 il raggio associato a questo valore del potenziale, nel caso limite in cui l'energia totale del sistema sia proprio uguale al minimo del potenziale (E_0) il valore r_0 è l'unico raggio accettabile, e l'energia cinetica radiale è sempre nulla. Questo vuol dire che l'orbita del pianeta avrà dis-

⁴L'energia totale è la somma di potenziale efficace e energia cinetica radiale, se il potenziale efficace è maggiore dell'energia totale vuol dire che l'energia cinetica è negativa, ma questo non è possibile per definizione

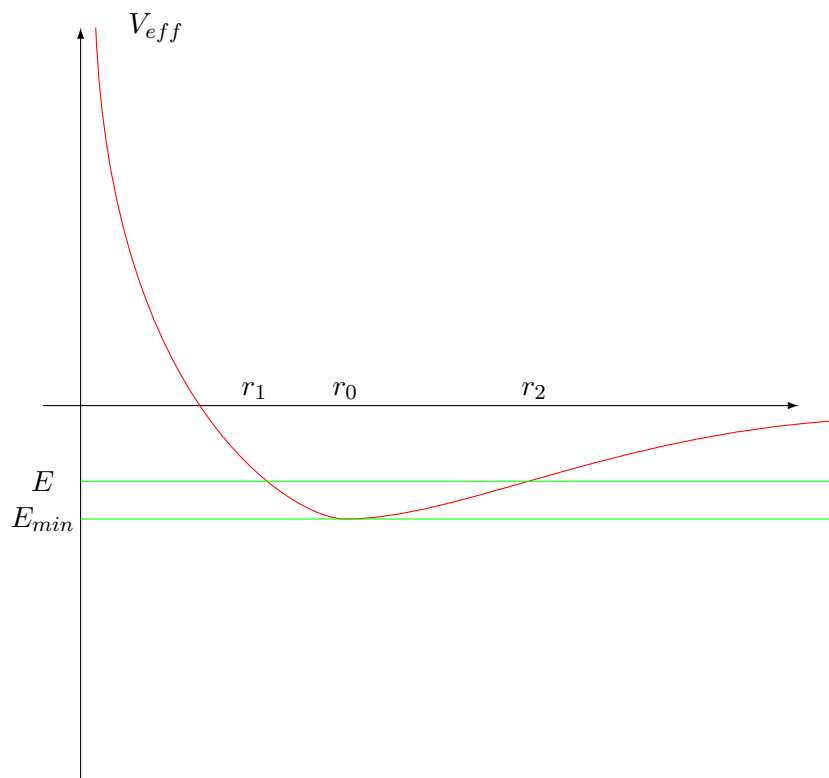


Figura 5.3: Potenziale efficace paragonato all'energia totale che genera un'orbita ellittica

tanza costante dal centro di massa, in parole povere si tratta di un'orbita **circolare**.

Nel caso in cui l'energia totale assume un valore compreso tra $E_0 < E < 0$ la retta interseca il grafico del potenziale efficace in due punti, come mostra la Figura 5.3. Poiché i raggi possibili variano nell'intervallo in cui il potenziale efficace è minore dell'energia cinetica la distanza del pianeta dal sole varierà tra due valori r_1 e r_2 in cui l'energia cinetica radiale è nulla (la velocità è perpendicolare al raggio). La figura geometrica che soddisfa questa traiettoria è l'ellisse, il cui semiasse maggiore è $r_1 + r_2$, e il sole si trova sul fuoco determinato dai due raggi.

Se l'energia totale è nulla, la retta dell'energia totale interseca il potenziale efficace in un solo punto, e l'altro è all'infinito. Questo significa che esiste un punto nella traiettoria in cui l'energia cinetica radiale è nulla, che è anche il minimo valore possibile per r . Da questo ricaviamo che la traiettoria in questione è una parabola.

Se l'energia totale è positiva, la retta interseca il grafico in un punto unico. In questo caso la traiettoria è un'iperbole.

In realtà sarebbe stato possibile ricavare direttamente le equazioni delle traiettorie a partire dalle formule che abbiamo visto fino ad ora, ma il procedimento è lungo e laborioso, si rimanda lo studio su un testo di approfondimento.

Riassumiamo quanto detto nello schema Tabella 5.1.

Valori dell'energia totale	Valori possibili dei raggi	Orbita
$E = E_{min}$	$r = r_0$	Circonferenza
$E_{min} < E < 0$	$r_1 < r < r_2$	Ellisse
$E = 0$	$r \geq r_1$	Parabola
$E > 0$	$r \geq r_1$	Iperbole

Tabella 5.1: Tabella di riepilogo per le orbite possibili dei corpi attorno ad uno di massa molto maggiore

Da tutto questo si può notare come il problema di ricavare l'orbita di un corpo attorno ad un altro si riduce semplicemente a calcolare l'energia totale del sistema, infatti se l'energia totale è negativa l'oggetto rimane catturato compiendo un'orbita ellittica (o al limite circolare), se l'energia totale è positiva l'oggetto sfugge dalla gravità allontanandosi fino all'infinito con traiettoria iperbolica (o al limite parabolica).

5.4 Seconda legge di Keplero

Come visto all'inizio di questo capitolo la seconda legge di Keplero afferma che un pianeta spazza aree uguali in tempi uguali.

Un altro modo piú scientifico per scrivere questa legge é dire che la velocitá areale di un pianeta é costante. In altre parole la quantitá $\frac{dA}{dt}$ non dipende dalla specifica posizione dell'oggetto.

Questa é una diretta conseguenza del secondo principio della dinamica. In particolare, in un campo di forze centrali si conserva il **momento angolare**.

Chiamiamo \vec{r} il raggio che collega il Sole con il pianeta. In un intervallo di tempo dt esso percorre una velocitá pari a $d\vec{r} = \vec{v}dt$. Quindi, poiché dt é molto piccolo possiamo approssimare costante v in quel punto.

L'area percorsa in un tempo dt puó essere scritta sfruttando le proprietá del prodotto vettoriale⁵

$$dA = \frac{1}{2}|\vec{r} \times \vec{v}dt| = \frac{dt}{2m}|\vec{r} \times m\vec{v}|$$

Ricordiamoci la definizione di momento angolare: $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$. Da qui andiamo avanti.

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2m}|\vec{L}|$$

Poiché il momento angolare é costante, é costante anche la velocitá areolare del corpo! Abbiamo appena dimostrato la seconda legge di Keplero.

5.5 Terza legge di Keplero

La dimostrazione alla terza legge di Keplero abbastanza tosta, quindi riconduciamoci nel caso semplice di orbite circolari in cui diventa molto semplice dimostrarla⁶.

Prendiamo un pianeta che si muove a velocitá \vec{v} intorno al sole: sará soggetto ad una accelerazione centripeta per mantenere il moto pari a $\omega^2 r$ (dove $\omega = \frac{v}{r}$).

Questa accelerazione centripeta é data dalla forza di gravitá, che sappiamo scrivere. Uguagliamole per ottenere che:

$$G \frac{m_1 m_2}{r^2} = m_1 \omega^2 r$$

$$r^3 = G m_2 \cdot \frac{1}{\omega^2}$$

Ricordiamo che $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

$$r^3 = \frac{G m_2}{4\pi^2} T^2$$

⁵Si ricorda che l'area A del parallelogramma generato da due vettori \vec{a} e \vec{b} é data dal loro prodotto vettoriale:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = A$$

⁶Ottima approssimazione per tutti i pianeti del sistema solare

Da cui ricaviamo la terza legge di Keplero:

$$r^3 = CT^2$$

Dove C dipende solo dalla massa della stella attorno alla quale orbita il pianeta, non dalla massa del pianeta stesso.

Capitolo 6

Meccanica dei sistemi

Fino ad ora abbiamo parlato della dinamica del punto materiale, fatta eccezione per la sezione 5.2 dove abbiamo considerato i corpi sferici estesi nello spazio.

Adesso proviamo a tirarci fuori da questa astrazione, e cercare di trattare sistemi di più punti materiali, siano essi finiti, o infiniti.

Infatti qualunque corpo è ben rappresentato da un numero più o meno grande di atomi.

Definizione 23 *Si definisce **Sistema** un aggregato di punti materiali*

Un particolare sottogruppo dei sistemi è formato dai cosiddetti *corpi rigidi*, di cui rimandiamo la trattazione più avanti.

Per studiare i sistemi in maniera intelligente occorre fissare un conveniente sistema di riferimento. Come abbiamo già visto nella trattazione del problema dei due corpi (sezione 5.3.1) è conveniente introdurre una coordinata chiamata **Centro di massa**. La definizione di centro di massa è stata già data nella sezione 5.3.1, definizione 20.

La riporto qui per semplicità:

$$\vec{R}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

6.1 Proprietà del centro di massa

Il centro di massa gode di alcune proprietà molto importanti: analizziamole.

6.1.1 Proprietà distributiva

Questa proprietà è molto utile per ricavare la posizione del centro di massa di un sistema complesso, per cui ricorrere al calcolo diretto può essere molto difficile.

Se un sistema S è diviso in due sottosistemi complementari S_1 e S_2 , il centro di massa di S è dato da:

$$\vec{R}_{cm} = \frac{M_1 \vec{R}_{cm_1} + M_2 \vec{R}_{cm_2}}{M_1 + M_2}$$

In parole povere il centro di massa può essere calcolato come centro di massa di sottosistemi di S , purché tra loro complementari.

La dimostrazione di questa proprietà è ovvia.

6.1.2 Simmetrie

Un'altra importante proprietà di cui gode il centro di massa è fondamentale per calcolare la sua posizione facilmente è quella delle simmetrie: Se il corpo possiede una qualunque simmetria, il centro di massa giace sempre sull'asse di simmetria.

Questo ci consente di calcolare il centro di massa di corpi estesi molto facilmente: prendiamo ad esempio la sfera. Il centro di massa di una sfera uniforme giace sugli assi di simmetria rotazionali, che sono tutti gli assi passanti per il centro. Poiché il centro di massa deve appartenere a tutti questi assi, il centro di massa coincide con il centro della sfera.

Il cono ha una simmetria rotazionale lungo l'asse longitudinale, però non possiede altre simmetrie, quindi dobbiamo ricorrere ad un altro mezzo per calcolare la posizione del centro di massa.

6.1.3 Centro di massa di corpi continui

Abbiamo parlato di sistemi di punti, ma come considerare i corpi continui, come cilindri, coni o sfere? Possiamo pensare questi oggetti non più formati da punti materiali, ma da una massa continua, ecco che questi corpi prendono nomi di *corpi continui*.

In un corpo continuo il centro di massa può essere comunque calcolato immaginando di scomporre il corpo in tanti piccoli cubetti, e quindi calcolare:

$$\vec{R}_{cm} = \frac{\sum_i \Delta m_i \vec{r}_i}{\sum_i \Delta m_i}$$

Facciamo il limite per $\Delta m_i \rightarrow 0$:

$$\vec{R}_{cm} = \frac{\int_M \vec{r}_i dm}{\int_M dm}$$

Possiamo scrivere questa formula in modo più vantaggioso, poiché calcolare un integrale sulla massa può essere difficoltoso.

Introduciamo il concetto di *densità di massa*.

Definizione 24 Si definisce densità di massa ρ di un corpo in questo modo:

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

La densità di massa può essere costante, e si parla di corpi di densità uniforme, o non costante. In questo caso la densità ρ di un corpo è una funzione della posizione $\rho(\vec{r})$.

Con questa definizione possiamo riscrivere l'integrale di prima:

$$R_{cm} = \frac{\int_V \vec{r} \rho(\vec{r}) dV}{\int_V \rho(\vec{r}) dV}$$

In questo modo siamo passati da un integrale sulla massa, molto difficile da calcolare, ad uno sul volume, più semplice.

Nel caso particolare in cui la densità del corpo è costante (corpi uniformi) possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} R_{cm} &= \frac{\rho \int_V \vec{r} dV}{\rho \int_V dV} = \frac{\int_V \vec{r} dV}{\int_V dV} \\ R_{cm} &= \frac{1}{V} \int_V \vec{r} dV \end{aligned} \quad (6.1)$$

6.1.4 Il moto del centro di massa

Come si è visto nelle sezioni precedenti, il centro di massa è un punto che gode di molte proprietà utili per calcolarlo, ma a che serve?

Come andremo a dimostrare, il moto traslazionale di qualunque corpo esteso può essere ricondotto al moto del suo centro di massa come se fosse un punto materiale con tutta la massa del corpo concentrata sul centro di massa.

Questo risultato è importantissimo! Infatti possiamo trattare qualunque corpo esteso come un punto materiale, i cui moti sono definiti dalle leggi che abbiamo studiato fino ad ora.

Passiamo alla dimostrazione.

Immaginiamo un sistema fatto da un numero finito di punti materiali, e associamo ad ognuno di questi punti la quantità di moto

$$\vec{q}_i = m_i \vec{v}_i$$

Possiamo definire la quantità di moto totale del sistema

$$\vec{Q}_{tot} = \sum_i \vec{q}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i$$

Ora deriviamo sul tempo la posizione del centro di massa:

$$\frac{d\vec{R}_{cm}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{M}$$

dove $M = \sum_i m_i$ è la massa totale del sistema.

A questo punto possiamo dire che:

$$\frac{d\vec{R}_{cm}}{dt} = \frac{\vec{Q}_{tot}}{M} = \vec{v}_{cm}$$

Da cui seguono le seguenti relazioni:

$$\vec{Q}_{tot} = M\vec{v}_{cm}$$

$$\frac{d\vec{Q}_{tot}}{dt} = M\vec{a}_{cm}$$

Andiamo avanti, proviamo a calcolare la variazione della quantità di moto totale sfruttando le leggi di Newton.

$$\frac{d\vec{Q}_{tot}}{dt} = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum_i m_i \vec{a}_i = \sum_i \vec{F}_i$$

Per comodità spezziamo \vec{F}_i in due componenti: una data dalle forze di interazione interna tra particelle dello stesso sistema, e una data dalle forze esterne ai due sistemi.

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(int.)} + \vec{F}_i^{(est.)}$$

Le forze interne sono le interazioni che tutte le particelle del sistema hanno con la particella i -esima. Per questo motivo scriviamo che:

$$\vec{F}_i^{(int.)} = \sum_j \vec{F}_{j(i)}$$

$$\frac{d\vec{Q}_{tot}}{dt} = \overbrace{\sum_i \sum_j \vec{F}_{j(i)}}^{\text{Forze interne}} + \sum_i \vec{F}_i^{(est.)}$$

Ma le forze interne sono uguali e opposte a due a due per il terzo principio di Newton, infatti la forza che la particella j imprime alla particella i è uguale in modulo e opposta alla forza che la particella i imprime alla particella j . Poiché in quella somma compaiono tutti termini del tipo $F_{i(j)} + F_{j(i)}$ che sono tutti nulli, la somma delle forze interne è nulla.

Quindi

$$\frac{d\vec{Q}_{tot}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i^{(est.)} = \vec{F}_{est}$$

Mettiamo insieme questo con il risultato ottenuto pocanzi, è otteniamo la miracolosa formula:

$$M\vec{a}_{cm} = \vec{F}_{est} \quad (6.2)$$

Questo vuol dire che il moto del centro di massa è determinato esclusivamente dalle forze esterne che agiscono sul sistema. Quindi si può schematizzare un qualunque sistema complesso calcolando le coordinate del centro di massa, e studiare la dinamica del centro di massa è incredibilmente più semplice che non studiare la dinamica di ciascun punto del sistema, tantopiù che questa è dettata dalle sole forze esterne.

6.2 Urti

Un tipico problema della fisica riguarda la possibilità di risolvere un urto tra due o più corpi. Per ora limitiamoci al caso di due punti materiali che entrano in collisione.

L'urto può essere di due tipi:

1. *elastico*: si conserva l'energia meccanica del sistema.
2. *anelastico*: non si conserva l'energia meccanica.

L'unico caso in cui l'urto può essere risolto senza informazioni aggiuntive sullo stato finale del sistema è quello elastico unidimensionale¹.

Per schematizzare ancora il sistema è possibile suddividere ulteriormente l'urto in base alla configurazione spaziale. Possiamo dire che ci sono urti unidimensionali (che avvengono in una retta), urti bidimensionali, e urti tridimensionali (la cui trattazione esula da questi appunti).

Per risolvere questi urti dobbiamo ricorrere ad un trucchetto: Schematizziamo il modello in questo modo. Prendiamo la condizione del sistema in un istante di tempo t in cui l'urto ancora non sia avvenuto, tale che a un tempo $t + dt$ l'urto sia avvenuto.

L'impulso delle forze esterne che agisce sul sistema in questo intervallo di tempo è

$$\vec{F}(t + dt - t) = \vec{q}_f - \vec{q}_i$$

$$\vec{F}dt = \vec{q}_f - \vec{q}_i$$

Prendiamo il limite per $dt \rightarrow 0$ e otteniamo

$$\Delta\vec{q} = \lim_{dt \rightarrow 0} \vec{F}dt = 0$$

Abbiamo appena ottenuto un'importante proprietà: In un urto si conserva sempre la quantità di moto del sistema, anche in presenza di forze esterne come la gravità.

¹In alcuni casi particolari che saranno studiati in seguito è possibile risolvere completamente anche quelli bidimensionali, ma devono sempre essere totalmente elastici

6.2.1 Urti monodimensionali

Studiamo adesso il caso specifico di urti elastici che avvengono in una linea retta. Chiamiamo v_1 e v_2 le velocità iniziali delle particelle, w_1 e w_2 le velocità finali.

Poiché l'urto è elastico possiamo scrivere come due equazioni la conservazione dell'energia meccanica e la conservazione della quantità di moto totale.

$$\begin{cases} m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{w}_1 + m_2 \vec{w}_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 w_1^2 + \frac{1}{2} m_2 w_2^2 \end{cases}$$

Come si può notare la prima formula (conservazione della quantità di moto) è scritta in forma vettoriale, nel caso unidimensionale possiamo tranquillamente rimuovere i vettori a patto di scrivere le velocità con il giusto segno.

Risolvere questo sistema è un po' lungo, per farlo usiamo una scorciatoia.

$$\begin{cases} m_1 \cdot (v_1 - w_1) = m_2 \cdot (w_2 - v_2) \\ m_1 \cdot (v_1^2 - w_1^2) = m_2 \cdot (w_2^2 - v_2^2) \end{cases} \quad (6.3)$$

Dividendo la seconda equazione per la prima otteniamo che:

$$v_1 + w_1 = w_2 + v_2$$

Questa è un'equazione lineare, che possiamo sostituire nel sistema iniziale alla formula della conservazione dell'energia cinetica. Così facendo si passa da un sistema non lineare ad uno lineare.

Chiaramente abbiamo perso delle soluzioni in questo modo, infatti dobbiamo ricordarci che nel dividere la seconda equazione del sistema (6.3) per la prima abbiamo semplificato al denominatore le quantità $(v_1 - w_1)$ e $(v_2 - w_2)$. Quindi dobbiamo ricordarci di porre i denominatori diversi da zero e scrivere:

$$v_1 \neq w_1 \quad v_2 \neq w_2 \quad (6.4)$$

Ora possiamo procedere, torniamo al sistema principale:

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 w_1 + m_2 w_2 \\ v_1 + w_1 = v_2 + w_2 \end{cases}$$

Da questo ricaviamo subito i valori di w_1 e w_2 :

$$\begin{cases} w_1 = \frac{2m_2 v_2 + v_1(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2} \\ w_2 = \frac{2m_1 v_1 + v_2(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

Casi critici

Può essere utile studiare alcuni casi interessanti:

1. Quando i due oggetti che si scontrano hanno la stessa massa
2. Quando uno dei due oggetti ha una massa molto maggiore dell'altro

Prendiamo subito il primo caso: $m_1 = m_2$.

$$w_1 = \frac{2mv_2}{2m} = v_2$$
$$w_2 = \frac{2mv_1}{2m} = v_1$$

I due corpi si scambiano velocità. È questo quello che accade quando lanciamo una palla di biliardo contro l'altra e riusciamo a colpirla al centro (urto unidimensionale). La palla che colpisce rimane ferma, quella colpita schizza via con velocità pari a quella che colpisce.

Adesso affrontiamo invece il caso in cui $m_2 \gg m_1$:

$$w_1 = 2v_2 - v_1$$
$$w_2 = v_2$$

Anche questo caso è abbastanza intuitivo, pensiamo ad un oggetto di massa molto grande come un muro e una pallina da ping-pong che ci urta, il muro rimmarrà fermo, la pallina da ping-pong torna indietro con la stessa velocità iniziale ma di verso opposto ($v_2 = 0$)²

6.2.2 Urti bidimensionali

Negli urti monodimensionali, come si è visto, per studiare il moto dei corpi dopo l'urto, è sufficiente invocare, con i dovuti accorgimenti, la conservazione della quantità di moto e dell'energia cinetica; nel caso bidimensionale più semplice, ossia quello di urti elastici, le due conservazioni si Q e K non sono più sufficienti. Infatti le velocità finali dei due corpi hanno ognuna due componenti e servono almeno 4 equazioni per risolverle. Ora scomponendo la velocità nell'equazione della quantità di moto si ricavano due equazioni; abbiamo così ottenuto un sistema di tre equazioni in quattro incognite, infinito alla uno soluzioni...troppe! Occorre quindi risolvere le equazioni del moto.

Scegliamo un caso semplice, due palle da biliardo di uguale massa e dimensione, di cui una è ferma e occupa parzialmente la linea di moto dell'altra

²In realtà ho fatto notare che il caso in cui $w_2 = v_2$ è difficile da trattare perché in questo caso non viene rispettata la disequazione (6.4). Tuttavia per ottenere questo risultato abbiamo fatto delle semplificazioni, ovvero supposto che $\frac{m_1}{m_2} = 0$. Quindi quello che possiamo dire è che $\lim_{\frac{m_1}{m_2} \rightarrow 0} w_2 = v_2$ rispettando anche la disequazione (6.4).

in movimento (se fossero allineate si ritornerebbe all'urto monodimensionale), come schematizzato in Figura 6.1.

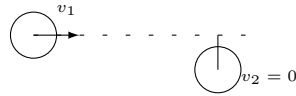


Figura 6.1: Urto

Allora avrò le condizioni iniziali, scegliendo un opportuno sistema di riferimento:

- $v_{1x} = v_1$
- $v_{1y} = 0$
- $v_{2x} = 0$
- $v_{2y} = 0$
- b

Dove b è la distanza fra il centro della palla ferma e la linea di moto di quella in movimento; Allora per risolvere il sistema e trovare l'equazione che mi manca noto che dopo l'urto le velocità finali devono formare un angolo di 90° , infatti la forza derivante dall'urto si crea lungo la congiungente ai due centri, la componente di velocità lungo quella direzione, in accordo con la teoria degli urti monodimensionali si annulla della palla in moto e si trasferisce a quella inizialmente ferma, e alla prima rimane solo la componente verticale, rispetto alla congiungente; inoltre qualsiasi angolo minore di novanta gradi determinerebbe una compenetrazione dei corpi.

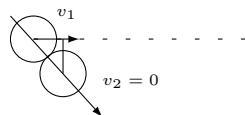


Figura 6.2: Momento dell'urto

6.2.3 Risoluzione degli urti nel sistema del centro di massa

Proviamo ora a risolvere totalmente gli urti bidimensionali, nel caso semplice in cui una sfera sia immobile, e l'urto sia totalmente elastico.

Per farlo mettiamoci nel sistema di riferimento del centro di massa. La quantità di moto iniziale del sistema in questo sistema di riferimento è pari a 0. La velocità del primo proiettile che si muove con velocità \vec{v}_1 nel sistema del laboratorio è:

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 - \vec{V}_{cm} = v_1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

$$\vec{v}'_2 = -\vec{V}_{cm} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} v_1$$

Da cui le due quantità di moto sono:

$$\begin{cases} \vec{q}'_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1 = \mu v_2 \\ \vec{q}'_2 = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_1 = -\mu v_1 \end{cases}$$

Dove il simbolo μ è la massa ridotta, definita durante lo studio del problema dei due corpi.

Come si nota le due quantità di moto hanno lo stesso modulo.

Sfruttiamo ora le equazioni della conservazione dell'energia meccanica. L'energia meccanica iniziale può essere calcolata come segue:

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

$$K_1 = \frac{q_1'^2}{2m_1} + \frac{q_2'^2}{2m_2} = q'^2 \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} \right)$$

Sfruttando la considerazione fatta prima che le due quantità di moto iniziali avessero lo stesso modulo. Ma anche le due quantità di moto finali hanno lo stesso modulo nel sistema di riferimento del centro di massa, infatti risulta che:

$$\vec{Q}_{tot} = 0$$

Poiché la quantità di moto totale si conserva anche dopo l'urto:

$$\vec{Q}_{tot} = \vec{q}_1'' + \vec{q}_2''$$

$$|\vec{q}_1''| = |\vec{q}_2''|$$

Dove ovviamente q_1'' e q_2'' sono le quantità di moto finali rispettivamente della prima e della seconda particella. Scriviamo quindi in maniera analoga a come fatto prima l'energia cinetica finale:

$$K_2 = \frac{q_1''^2}{2m_1} + \frac{q_2''^2}{2m_2} = q''^2 \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2} \right)$$

Poiché l'energia cinetica iniziale deve essere uguale a quella finale, risulta vero che:

$$|q'| = |q''|$$

Abbiamo quindi che nel sistema di riferimento del centro di massa tutti i moduli delle quantità di moto sono uguali!

Per risolvere definitivamente il sistema occorre solo trovare l'angolo con cui vengono deviate le due palline. Poiché la quantità di moto totale deve essere nulla, è evidente che questo angolo deve essere uguale per tutte e due le sfere.

Per trovare l'angolo ricordiamo quanto detto all'inizio, ovvero che l'impulso interno alle due sfere è diretto sempre lungo la congiungente dei due centri. Risulta quindi che:

$$\Delta \vec{q}_1 = \vec{I}_1$$

Dove \vec{I} è l'impulso della particella.

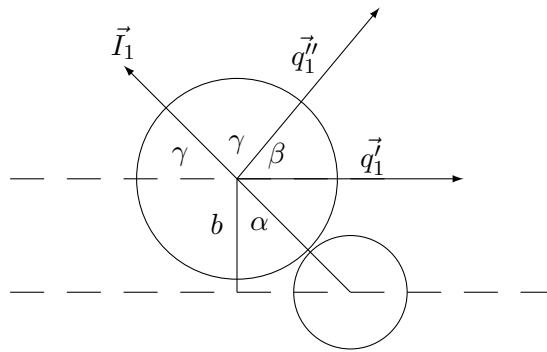


Figura 6.3: Schema dell'urto della particella 1, chiaramente è simmetrico per la particella 2

Come si nota dalla Figura 6.3, l'angolo β può essere facilmente trovato dalle seguenti considerazioni geometriche:

$$\beta = \pi - 2\gamma \tag{6.5}$$

Tuttavia noi non conosciamo il valore di γ , ma questo può essere ricavato a partire dalla conoscenza del parametro d'urto b , definito come la distanza tra la velocità della sfera e il centro di quella immobile. A questo punto

possiamo ricavare l'angolo α da semplici considerazioni geometriche:

$$(R_1 + R_2) \cos \alpha = b$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{R_1 + R_2}$$

Dove R_1 e R_2 sono rispettivamente i raggi delle due sfere. A questo punto possiamo scrivere γ in funzione di α dicendo che:

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \alpha$$

Sostituiamo questa espressione nella formula (6.5) per ottenere che:

$$\beta = \pi - \pi + 2\alpha \quad \beta = 2\alpha$$

Da cui abbiamo risolto anche il problema di trovare l'angolo di inclinazione della quantità di moto:

$$\begin{cases} \beta = 2\alpha \\ \cos \alpha = \frac{b}{R_1 + R_2} \end{cases}$$

A questo punto basta tornare nel sistema del laboratorio usando le trasformazioni di Galileo: (w sono le velocità finali)

$$\begin{cases} v''_{1x} = v \cdot \cos \beta \\ v''_{1y} = v'_1 \cdot \sin \beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} w_{1x} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_1 \cdot \cos \beta + \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{v_1}{m_1 + m_2} (m_2 \cos \beta + m_1) \\ w_{1y} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_1 \cdot \sin \beta \end{cases}$$

E analogamente si procede con l'altra particella, ricordandosi che nelle trasformazioni di Galileo, la velocità del centro di massa (diretta solo lungo x) deve essere sottratta e non sommata

6.3 Corpi rigidi

Definizione 25 (Corpo rigido) *Si definisce corpo rigido, un sistema di punti avente la caratteristica che tutte le distanze tra i punti si conservano nel tempo.*

La dinamica dei corpi rigidi si divide in:

- dinamica traslazionale

- dinamica rotazionale

Infatti un corpo idealizzato a corpo rigido ha la caratteristica di conservare le distanze e quindi per descrivere il suo moto, che nel caso di un sistema di n punti sarebbe descritto da $3n$, gradi di libertà, bastano sei numeri; nello specifico una terna per le coordinate del centro di massa e un'altra per un generico punto. In particolare il centro di massa si muoverà di moto traslazionale e il generico punto porterà l'informazione sul moto rotazionale. Ora per cominciare, consideriamo il caso semplice in cui:

- $Q_{cm} = 0$, il corpo non trasla
- L'asse di rotazione è fisso

Prendiamo l'esempio della porta, vincolata a ruotare attorno i suoi cardini.

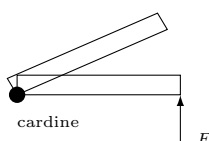


Figura 6.4: Schema dell'urto

I punti saranno descritti da un'equazione in funzione di θ che varierà nel tempo e quindi avremo:

- $\theta(t)$ angolo
- $\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega(t)$ velocità angolare
- $\frac{d\omega(t)}{dt} = \alpha(t)$ accelerazione angolare

Il problema è come ricavo $\theta(t)$? Intanto noto che intuitivamente se applico la forza all'estremo della porta ma muoverò con più facilità rispetto all'applicarla in prossimità del cardine, quindi posso dire che $\alpha(t) \propto RF$ dove con R indico la distanza tra il punto in cui applico la forza e il cardine. Inoltre, sempre dall'esperienza, sappiamo che si ottengono maggiori risultati applicando la forza perpendicolarmente quindi l'accelerazione dipenderà anche dal seno dell'angolo di applicazione e quindi, considerando anche che per convenzione l'accelerazione è un vettore perpendicolare al piano xy , viene naturale definire un prodotto vettoriale fra R e F , tale prodotto prende il

nome di momento torcente o *coppia* (in inglese 'torque') e si indica con la lettera τ . Avremo quindi:

$$\vec{\alpha} \propto \vec{\tau} \text{ con } \vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{F}$$

Ora non rimane che trovare una costante di proporzionalità tale che, (passando al modulo per semplicità), $\alpha = CRF$. Ora se immaginiamo tutta la massa della porta concentrata nel punto in cui si applica la forza allora avremo un'accelerazione tangenziale pari a $a_T = \frac{F}{m}$ e una angolare $\alpha = \frac{a_T}{R}$; nel nostro caso allora $\alpha = \frac{F}{R \cdot m}$, ma allora:

$$\alpha = CRF \text{ e } \alpha = \frac{F}{R \cdot m} \text{ mettendo insieme } C = \frac{1}{R^2 m}$$

Ora se pensiamo alla porta come ad un insieme di tante masse possiamo considerare la quantità $R^2 m$ come una sommatoria di tante masse distribuite lungo la porta e chiamare quindi tale sommatoria momento di inerzia rispetto ad un'asse.

Definizione 26 *Si definisce momento d'inerzia rispetto ad un'asse il valore*

$$I = \sum_i R_i^2 m_i \rightarrow \vec{\tau} = I \cdot \vec{\alpha} \quad (6.6)$$

Dove per corpi continui si ha:

$$I = \int \rho R^2 dV$$

6.3.1 Rotazioni attorno ad asse fisso e di simmetria

Studiamo la dinamica dei punti che ruotano attorno ad un asse fisso. Immaginiamo un disco rotante (ma il discorso vale per qualunque corpo rigido), vedi Figura 6.5:

Se sta ruotando attorno all'asse \hat{k} con velocità angolare ω possiamo scrivere la velocità di qualunque punto interno al sistema:

$$\vec{v}_i = \vec{r}_i \times \vec{\omega}$$

Dove abbiamo scelto come origine un punto nell'asse di rotazione. Possiamo quindi scrivere quantità di moto del nostro punto.

$$\vec{Q}_i = m_i \cdot \vec{v}_i$$

Definiamo come momento angolare \vec{L} il momento della quantità di moto:

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{Q}_i$$

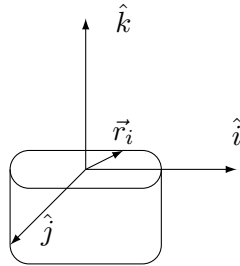


Figura 6.5: Corpo rigido che ruota attorno all'asse \hat{k} . Vogliamo studiare il moto di \vec{r}_i .

Da questa definizione possiamo calcolare il momento angolare di tutto il corpo rigido:

$$\vec{L}_{tot} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

Per risolvere facilmente questo calcolo basta scomporre il raggio in due componenti: una parallela a $\vec{\omega}$ e una ortogonale:

$$\vec{r}_i = z_i \hat{k} + \vec{\rho}_i$$

Continuiamo a calcolare \vec{L}_{tot} :

$$\vec{L}_{tot} = \sum_i \left(z_i \hat{k} + \vec{\rho}_i \right) \times m_i \left[\vec{\omega} \times \left(z_i \hat{k} + \vec{\rho}_i \right) \right]$$

Ricordiamo che \hat{k} è parallelo a $\vec{\omega}$.

$$\vec{L}_{tot} = \sum_i \left(z_i \hat{k} + \vec{\rho}_i \right) \times m_i (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i)$$

Eseguiamo il prodotto vettoriale e otteniamo il seguente risultato:

$$\vec{L}_{tot} = \underbrace{- \sum_i m_i z_i \omega \vec{\rho}_i}_{\text{Componente normale a } \vec{\omega}} + \underbrace{\sum_i m_i \rho_i^2 \vec{\omega}}_{\text{Componente parallela a } \vec{\omega}}$$

Si nota che se ω è un asse di simmetria $\sum_i m_i z_i \rho_i = 0$. Quindi vuol dire che:

$$\vec{L}_{tot} = \vec{\omega} \cdot \sum_i m_i \rho_i^2$$

Ma il secondo termine è proprio il momento di inerzia come si ricorda dall'equazione 6.6. Risulta quindi verificato, nel caso in cui l'asse di rotazione sia un asse di simmetria, il momento angolare è parallelo a ω ed è pari a:

$$\vec{L}_{tot} = I\vec{\omega} \quad (6.7)$$

6.3.2 Teorema di Huygens-Steiner

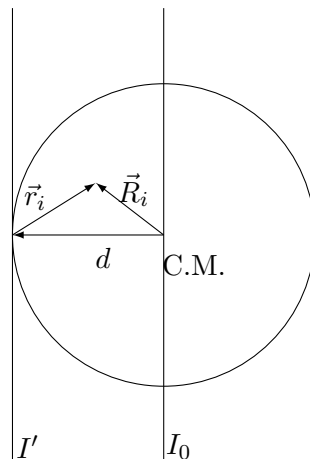


Figura 6.6: Traslare l'asse di rotazione

Il teorema di Huygen-Steiner, è un comodissimo mezzo per poter facilmente calcolare come varia il momento d'inerzia traslando l'asse di rotazione, mantenendone lo stesso orientamento.

Teorema 4 (Huygens-Steiner) *Dato il momento di inerzia attorno a un asse di rotazione I_0 , traslando questo asse di una lunghezza d si ottiene un nuovo momento d'inerzia pari a:*

$$I' = I_0 + Md^2$$

Come si può capire questo teorema ha importantissimi risvolti, in quanto rende semplice il calcolo del momento d'inerzia attorno ad assi non simmetrici.

Passiamo alla dimostrazione:

Notiamo dalla Figura 6.6 che la distanza dal nuovo asse di rotazione di ogni particella è pari alla somma della distanza dall'asse passante per il centro di massa meno la traslazione dell'asse:

$$\vec{r}_i = \vec{R}_i - \vec{d}$$

Passiamo alla definizione del nuovo momento d'inerzia:

$$I' = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i (\vec{R}_i - \vec{d})^2$$

$$I' = \sum_i m_i R_i^2 + \sum_i m_i d^2 - 2d \sum_i m_i \vec{R}_i$$

Riconosciamo un po' di termini: il primo è il momento di inerzia rispetto al centro di massa (ricordiamo la definizione 6.6), il terzo è la posizione del centro di massa. Poiché abbiamo scelto come origine del nostro sistema il centro di massa, la sua coordinata è nulla.

$$I' = I_o + d^2 \sum_i m_i = I_o + M_{tot} d^2$$

Abbiamo dimostrato il teorema.

6.3.3 Equazioni cardinali della dinamica dei sistemi

Fino ad ora ci siamo occupati di calcolare come si comporta un corpo rigido che ruota attorno ad un asse fisso. È arrivato il momento di comprendere l'origine delle rotazioni e delle traslazioni dei corpi rigidi. In altre parole dobbiamo descrivere completamente la dinamica dei corpi rigidi. Per far questo occorrono due relazioni: una che definisce il moto del centro di massa, e una che definisce la rotazione dell'oggetto. La prima è semplice, e l'abbiamo già studiata quando abbiamo parlato dei punti materiali. Infatti dal punto di vista traslazionale il nostro corpo si comporta esattamente come un punto materiale la cui massa è concentrata tutta nel centro di massa!

Possiamo scrivere quindi la prima delle due equazioni cardinali:

$$\vec{F}_{est} = M_{tot} \cdot \vec{a}$$

O meglio ancora sfruttando la definizione di quantità di moto

$$\vec{F}_{est} = \frac{d\vec{Q}_{tot}}{dt}$$

Rimane il problema di descrivere la rotazione dei corpi. Abbiamo visto prima come può essere utile studiare il momento angolare per capire la

dinamica rotazionale di un corpo, sviluppiamo la definizione di momento angolare:

$$\vec{L} = \int_M \vec{r} \times d\vec{Q} \quad d\vec{Q} = \vec{v} \cdot dm$$

Dove si è preferito usare la notazione con l'integrale per i corpi continui.

$$\vec{L} = \int_M (\vec{r} \times \vec{v}) dm$$

Deriviamo tutto rispetto al tempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \int_M \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} dm + \int_M \vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} dm$$

Il primo termine è nullo, poiché la derivata di \vec{r} sul tempo è proprio la velocità, e $\vec{v} \times \vec{v} = 0$. Riconosciamo che $\frac{dv}{dt} = a$ e passiamo a scrivere:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \int_M \vec{r} \times \vec{a} dm \quad \underbrace{d\vec{F} = \vec{a} dm}_{\text{Forza elementare agente su } dm}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \int_M \vec{r} \times d\vec{F} \quad \underbrace{d\vec{\tau} = \vec{r} \times d\vec{F}}_{\text{Momento di } \vec{F} \text{ elementare}}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \int_M d\vec{\tau}$$

L'integrale fatto su tutti i momenti delle forze agenti sul sistema corrisponde al momento delle sole forze esterne, poiché gli altri si annulleranno a due a due nel caso in cui il polo sia centrato nel centro di massa. Studieremo in seguito cosa succede quando questa condizione non risulta vera, nel frattempo possiamo scrivere la seconda equazione cardinale:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{est}$$

Che combinata con il risultato ottenuto nella (6.7) diventa:

$$\vec{\tau}_{est} = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I\vec{\alpha}$$

Mettiamo insieme le due equazioni ottenute:

$$\begin{cases} \vec{F}_{est} = M\vec{a} = \frac{d\vec{Q}_{tot}}{dt} \\ \vec{\tau}_{est} = I\vec{\alpha} = \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt} \end{cases} \quad (6.8)$$

Come si può notare le due equazioni cardinali si assomigliano molto, la seconda in particolare presenta I al posto di M come coefficiente dell'accelerazione. Questo spiega come mai I si chiama momento d'inerzia, infatti

misura l'inerzia rotazionale di un corpo, proprio come M misura l'inerzia traslazionale di un corpo.

Tanto più grande è M , tanto maggiore deve essere la forza che do per far spostare quel corpo, allo stesso modo tanto più grande è I , tanto maggiore deve essere il momento della forza per mettere in rotazione quel corpo.

Come si può notare entrambe le equazioni possono essere scritte in forma differenziale.

6.3.4 Energia associata alla rotazione

È naturale pensare che, come la traslazione di un corpo generi un'energia cinetica, anche la rotazione lo faccia. Infatti i punti materiali che compongono il corpo si muoveranno, anche se con velocità diverse in base alla distanza dall'asse di rotazione.

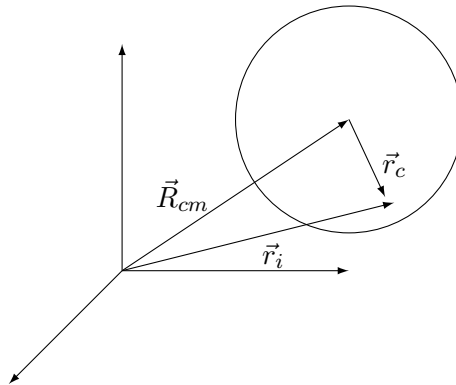


Figura 6.7: Corpo che ruota

Per scrivere l'energia cinetica del sistema scriviamo la formula della velocità del generico punto P_i del sistema.

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{\omega} \times \vec{r}_c$$

Se l'asse di rotazione è centrata nel centro di massa, come si nota dalla Figura 6.7, il valore $\vec{r}_c = \vec{r}_i - \vec{R}_{cm}$.

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm})$$

Quindi l'energia cinetica è pari a:

$$\begin{aligned}
 E_c &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 \\
 E_c &= \sum_i \frac{1}{2} m_i \left[\vec{v}_{cm} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \right]^2 \\
 E_c &= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{cm}^2 + \sum_i m_i v_c \left[\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \right] + \sum_i \frac{1}{2} m_i \left[\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \right]^2 \\
 E_c &= \frac{1}{2} M_{tot} v_{cm}^2 + v_{cm} \vec{\omega} \times \underbrace{\sum_i m_i \vec{r}_{ci}}_{=0} + \frac{1}{2} \sum_i m_i \left[\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \right]^2 \\
 E_c &= \frac{1}{2} M_{tot} v_{cm}^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i \left[\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{R}_{cm}) \right]^2
 \end{aligned}$$

Ora diamo alcune definizioni prima di proseguire con i conti. Abbiamo nell'ultimo conto semplificato un termine, perché se scegliamo come riferimento il centro di massa il termine della sommatoria è proprio la coordinata del centro di massa, che è pari a zero. Definiamo per comodità energia cinetica traslazionale del centro di massa il primo termine:

$$E_{cm} = \frac{1}{2} M_{tot} v_{cm}^2$$

Adesso passiamo a studiare il secondo termine. Per farlo scomponiamo il raggio \vec{r}_c nelle componenti normali e parallele all'asse di rotazione:

$$\vec{r}_i - \vec{R}_{cm} = z_i \hat{k} + \vec{\rho}_i$$

E ricordiamo come il prodotto vettoriale di due vettori paralleli sia nullo:

$$\vec{\omega} \times (z_u \hat{k} + \vec{\rho}_i) = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$$

Poiché a noi interessa il modulo di questo prodotto vettoriale (infatti l'energia è uno scalare), e questi vettori sono normali, quindi il modulo del prodotto vettoriale è pari al prodotto dei moduli.

$$E_c = E_{cm} + \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega \rho_i)^2$$

$$E_c = E_{cm} + \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i \rho_i^2$$

Ma ancora una volta riconosciamo nell'ultima sommatoria il momento di inerzia I , definito dalla formula 6.6. Definiamo questo secondo termine come energia cinetica rotazionale:

$$E_{rot} = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Si nota come ci siano molte affinità tra questa formula e l'energia cinetica traslazionale. Ancora una volta il momento d'inerzia prende il posto della massa, e la velocità angolare il posto della velocità, per il resto sono perfettamente uguali.

Possiamo a questo punto descrivere tutta l'energia cinetica di un corpo rigido:

$$E_c = E_{cm} + E_{rot} = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

Questo è noto come **Teorema di König**

6.3.5 Squilibrio dinamico

Fino ad ora abbiamo trattato di rotazioni attorno ad assi fissi passanti per il centro di massa. Cosa succede se l'asse di rotazione non passa per il centro di massa? È sempre possibile e facile calcolare il momento d'inerzia del corpo rispetto ad un asse fisso non passante per il centro di massa attraverso il teorema di Huygen-Steiner (teorema 4). Tuttavia questo asse sarà soggetto ad una forza diretta verso il centro di massa del corpo rotante.

Supponiamo di far roteare il sistema in Figura 6.8, dove $m_1 \neq m_2$.

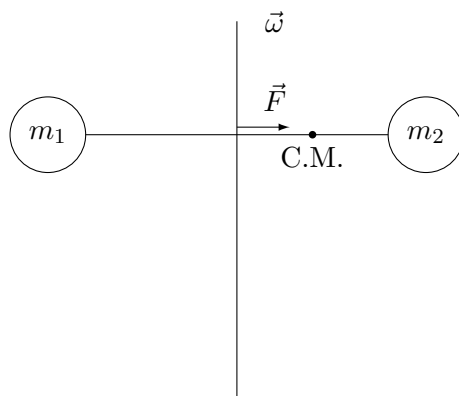


Figura 6.8: Due masse differenti che ruotano attorno ad un asse $\vec{\omega}$ che non passa per il centro di massa producono una forza che tende a spostare l'asse di rotazione. Se questo è tenuto fisso, il supporto viene deformato fino a spezzarsi. (In figura si suppone $m_2 > m_1$)

Infatti per mantenere in rotazione una massa m attorno ad un generico asse, occorre applicare a questa massa una forza centripeta:

$$\vec{F}_i = m\omega^2\vec{d}$$

Per cui sull'asse di rotazione si sviluppa una forza uguale e opposta per il terzo principio di Newton. Sommando su tutte le masse otteniamo:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \omega^2 \underbrace{\sum_i m_i \vec{d}_i}_{C.M.}$$

Si nota chiaramente che se l'asse di rotazione coincide con il centro di massa il termine $\sum_i m_i \vec{d}_i = 0$, quindi la forza agente sull'asse è nulla. In caso contrario questa forza non è nulla, e spinge l'asse verso la coordinata del centro di massa.

$$F = \omega^2 \cdot M_{tot} \cdot X_{c.m.}$$

6.3.6 Moto rotazionale generico

Fino ad ora abbiamo parlato di corpi rigidi vincolati a ruotare attorno ad un asse fisso. Nell'ultima parte abbiamo visto cosa succede se questo asse non passa per il centro di massa, ma è arrivato il momento di trattare il caso più generale possibile, quando l'asse di rotazione non è fisso ma può variare nel tempo.

Esempi di questo tipo di rotazione le si hanno sotto gli occhi tutti i giorni, basti pensare ad una trottola, che oltre a ruotare attorno al proprio asse di rotazione, questo è in precessione attorno ad un altro asse verticale. Studieremo in seguito il moto della trottola, per ora concentriamoci nel definire le equazioni del moto togliendo la condizione di asse fisso.

Le equazioni cardinali della dinamica per l'asse fisso sono:

$$\begin{cases} \vec{F} = m\vec{a} & \vec{F} = \frac{d\vec{q}}{dt} \\ \vec{\tau} = I\vec{\omega} & \vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} \end{cases}$$

I due modi in cui sono presentate sono tra loro del tutto equivalenti nel caso di asse fisso, se questa condizione non è soddisfatta tuttavia assumono significati differenti, in primo luogo non sarà più possibile scrivere la seconda equazione cardinale.

Ci sono due modi per approcciare al problema, studiare il moto del corpo in un sistema di riferimento inerziale, e studiarlo in uno in moto solidale con il corpo rigido, affronteremo entrambe le trattazioni.

Studio del moto da un sistema inerziale

Per studiare il moto del corpo prendiamo un polo fisso Ω , scriviamo il momento risultante agente su questo corpo visto da omega:

$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

Prendiamo la definizione di momento angolare:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{q}_i$$

Deriviamo il momento angolare rispetto al tempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \left(\vec{r}_i \times \frac{d\vec{q}}{dt} + \underbrace{\vec{v}_i \times m\vec{v}_i}_{=0} \right)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{\tau}$$

Abbiamo dimostrato in pochi semplici calcoli che questa equazione cardinale è vera sempre nel caso ci mettiamo in un polo fisso Ω in un sistema inerziale. In questo caso non vale l'uguaglianza che

$$\frac{d\vec{L}}{dt} \neq I\dot{\omega}$$

Poiché I è il momento d'inerzia calcolato rispetto al polo Ω in un sistema di riferimento inerziale, quindi un qualunque punto \vec{r}_i del corpo ha una posizione che varia nel tempo rispetto a Ω , e per tanto varierà anche il valore di I , non rendendolo più costante.

Studio del moto in un sistema solidale al corpo rotante

In questo caso i conti sono un po' più complessi, in quanto non essendo in un sistema inerziale dobbiamo tener conto delle forze apparenti che si producono.

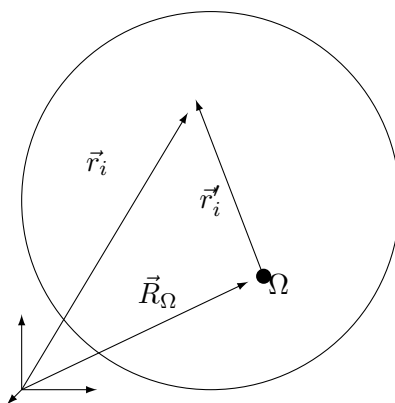


Figura 6.9: Ci mettiamo nel sistema di riferimento solidale con il corpo in Ω e proviamo a descrivere le equazioni del moto di ogni punto i -esimo del corpo

Come mostrato nella figura 6.9 la posizione di un punto \vec{r}_i è descritta:

$$\vec{r}_i = \vec{R}_\Omega + \vec{r}'_i$$

Da cui le velocità:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_\Omega + \vec{v}'_i$$

e le quantità di moto:

$$\vec{q}_i = \vec{q}_\Omega + \vec{q}'_i$$

Il momento angolare di tutti i punti rispetto al polo Ω solidale con il corpo vale:

$$\begin{aligned}\vec{L}_{\Omega i} &= \vec{r}'_i \times \vec{q}'_i \\ \vec{L}_\Omega &= \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{q}'_i\end{aligned}$$

Ricordiamo che il nostro obiettivo è ridefinire la seconda legge cardinale, per un polo fisso vale che il momento delle forze esterne è pari alla derivata del momento angolare, è naturale derivare il momento angolare:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} &= \sum_i \left(\underbrace{\frac{d\vec{r}'_i}{dt} \times \vec{q}'_i}_{=0} + \vec{r}'_i \times \frac{d\vec{q}'_i}{dt} \right) \\ \vec{q}'_i &= \vec{q}_i - \vec{q}_\Omega \\ \frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} &= \sum_i \vec{r}'_i \times \frac{d(\vec{q}_i - \vec{q}_\Omega)}{dt} = \sum_i \vec{r}'_i \times \left(\underbrace{\frac{d\vec{q}_i}{dt}}_{\vec{F}} - m_i \frac{d\vec{v}_\Omega}{dt} \right) \\ \frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} &= \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{F} - \frac{d}{dt} \left[\sum_i m_i (\vec{r}'_i \times \vec{v}_\Omega) \right]\end{aligned}$$

Ricordiamo la definizione di momento di una forza $\vec{\tau}_i = \vec{r}'_i \times \vec{F}_i$.

$$\frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} = \vec{\tau} - \frac{d}{dt} \left[\underbrace{\left(\sum_i m_i \vec{r}'_i \right)}_{C.M.} \times \vec{v}_\Omega \right]$$

Da questo possiamo ricavare la seconda equazione cardinale della meccanica descritta da un qualunque punto del corpo solidale con il centro di massa, dove indichiamo con \vec{R}_{cm} La posizione del centro di massa rispetto a Ω .

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}_\Omega}{dt} + \vec{R}_{cm} \times \frac{d\vec{v}_\Omega}{dt}$$

Questa formula è decisamente più complessa di quella usata fino ad ora, tuttavia esiste un punto del corpo tale che questa equazione diventa proprio uguale a quella che abbiamo studiato fino ad ora, questo punto è il centro di massa.

Infatti è facile notare che se $\vec{R}_{cm} = 0$ il termine aggiuntivo si cancella e l'equazione torna:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}_{cm}}{dt}$$

Quindi è importante capire che in un sistema, in assenza di momenti di forze esterne il momento angolare **si conserva solo rispetto a un polo fisso, o rispetto al centro di massa del sistema**, indipendentemente dal tipo di rotazione.

6.3.7 Tensore d'inerzia

Nel paragrafo precedente abbiamo completato lo studio di qualunque corpo rigido, abbiamo le equazioni cardinali opportunamente modificate per funzionare con qualunque asse rotazionale, fisso e non. L'unico problema è che abbiamo espresso la rotazione in funzione della derivata del momento angolare, che per quanto utile come grandezza fisica, non ha alcun effetto visivo sul sistema.

Il nostro compito adesso vuole essere quello di riscrivere il momento angolare in funzione della velocità angolare del corpo, una grandezza ben più significativa.

Scriviamo quindi come siamo abituati a fare \vec{L} nel caso di una rotazione generica:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{q}_i = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

Ricordiamo che per qualunque rotazione esiste sempre un asse istantaneo in cui è ossibile dire che la rotazione stà avvenendo attorno a quell'asse:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$

Il doppio prodotto vettoriale può essere scritto per componenti in questo modo:

$$\vec{r} = (r_x, r_y, r_z) \quad \vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$$

$$\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \begin{pmatrix} (r_y^2 + r_z^2) \omega_x - r_x r_y \omega_y - r_x r_z \omega_z \\ -r_y r_x \omega_x + (r_z^2 + r_x^2) \omega_y - r_y r_z \omega_z \\ -r_z r_x \omega_x - r_z r_y \omega_y + (r_x^2 + r_y^2) \omega_z \end{pmatrix} = \mathcal{A}_i \vec{\omega}$$

Se si fa attenzione a come è scritto questo prodotto vettoriale si nota che è il prodotto righe per colonne tra una matrice \mathcal{A} e il vettore $\vec{\omega}$. Da cui torniamo alla definizione di \vec{L} :

$$\vec{L} = \sum_i m_i \mathcal{A}_i \vec{\omega}$$

Poiché $\vec{\omega}$ è costante possiamo definire la quantità che moltiplica $\vec{\omega}$ come **tensore d'inerzia**.

$$\bar{\bar{I}} = \sum_i m_i \mathcal{A}_i$$

Definizione 27 (Tensore d'inerzia) Si definisce tensore d'inerzia $\bar{\bar{I}}$ la matrice 9×9 così composta:

$$\bar{\bar{I}} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Dove l'elemento $I_{\alpha\beta}$ è un momento d'inerzia così calcolato:

$$I_{\alpha\beta} = \sum_i m_i (|r_i^2| \delta_{\alpha\beta} - r_{i\alpha} r_{i\beta})$$

dove l'operatore $\delta_{\alpha\beta}$ (delta di Kronecker) è definito nel seguente modo:

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

Ora per complicare ulteriormente le cose basta far notare che il tensore di inerzia non è costante, ma varia nel tempo, perché varia nel tempo la posizione di tutti i punti \vec{r}_i .

Tuttavia ancora una volta le proprietà del centro di massa vengono in nostro aiuto per semplificare notevolmente queste formule. Se scegliamo un sistema di riferimento solidale con il centro di massa i vettori \vec{r}_i rimangono costanti nel tempo, e quindi rimane costante anche il tensore d'inerzia.

Ad una semplice osservazione sulla struttura del tensore di inerzia si nota che è una matrice simmetrica. Per il **teorema spettrale**³ esistono tre autovettori ortogonali che diagonalizzano la matrice.

È possibile quindi semplicemente ruotare il sistema di riferimento per ottenere un tensore d'inerzia molto più semplice:

$$\bar{\bar{I}} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

³Vi ricordo che il teorema spettrale afferma che un endomorfismo simmetrico ammette una base di autovettori ortogonali

Dove I_1 , I_2 e I_3 vengono detti **momenti principali d'inerzia**.

In linea del tutto generale possiamo dire che *qualunque corpo rigido possiede tre assi principali tra loro ortogonali in cui il tensore d'inerzia risulta diagonalizzato*.

Questi assi particolari sono detti **assi principali d'inerzia**.

6.4 Equazioni di eulero

6.4.1 Moto generale di un corpo rigido

Per studiare il moto di un corpo rigido possiamo utilizzare tre sistemi di riferimento: uno inerziale, uno con origine nel centro di massa ed assi paralleli agli assi inerziali, ed un solidale col centro di massa ed assi paralleli agli assi principali d'inerzia del corpo. Il modo più semplice di procedere è il terzo, poiché anche se non è più vero che $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$, il tensore di inerzia \bar{I} è diagonale, costante e non è funzione del tempo.

In questo sistema di riferimento, se $\vec{\omega}$ è la velocità angolare con cui ruota il sistema, un punto di vettore posizione \vec{R} ha vettore velocità costruito in questo modo:

$$\vec{v}_0 = \frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{v}_R + \vec{\omega} \times \vec{R},$$

dove \vec{v}_0 è la velocità nel sistema inerziale e \vec{v}_R è la velocità nel sistema rotante. Analogamente il momento angolare, e si ha questa struttura per la seconda equazione cardinale per la meccanica dei sistemi:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L},$$

in cui tutto è riferito al sistema rotante, e tutte le grandezze sono funzioni del tempo; si tratta del caso più generale possibile.

Ora proviamo a scrivere tutto in funzione di $\vec{\omega}$ per ricavare le equazioni di Eulero.

6.4.2 Le Equazioni di Eulero

Vogliamo arrivare a scrivere:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{L}.$$

Per farlo notiamo innanzitutto che:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{dI\vec{\omega}}{dt} = \bar{I} \frac{d\vec{\omega}}{dt},$$

perché come detto prima il tensore d'inerzia non è funzione del tempo.

Proviamo a scrivere ora il termine $\vec{\omega} \times \vec{L}$:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} \times \vec{L} &= \vec{\omega} \times \bar{I}\vec{\omega} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ I_{xx}\omega_x & I_{yy}\omega_y & I_{zz}\omega_z \end{vmatrix} = \\ &= \hat{i}(\omega_y I_{zz}\omega_z - \omega_y I_{yy}\omega_y) - \hat{j}(\omega_x I_{zz}\omega_z - \omega_z I_{xx}\omega_x) + \hat{k}(\omega_x I_{yy}\omega_y - \omega_y I_{xx}\omega_x) = \\ &= \hat{i}(I_{zz} - I_{yy})\omega_y\omega_z + \hat{j}(I_{xx} - I_{zz})\omega_x\omega_z + \hat{k}(I_{yy} - I_{xx})\omega_x\omega_y. \end{aligned}$$

Ora possiamo finalmente esplicitare le Equazioni di Eulero:

$$\begin{cases} I_{xx} \frac{d\omega_x}{dt} + (I_{zz} - I_{yy})\omega_y\omega_z = \tau_x \\ I_{yy} \frac{d\omega_y}{dt} + (I_{xx} - I_{zz})\omega_x\omega_z = \tau_y \\ I_{zz} \frac{d\omega_z}{dt} + (I_{yy} - I_{xx})\omega_x\omega_y = \tau_z \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di equazioni differenziali non omogenee non lineari di secondo grado e del primo ordine a coefficienti costanti nelle tre funzioni incognite ω_x , ω_y e ω_z . Queste equazioni in generale non sono risolvibili, ma in casi particolari si possono trovare delle soluzioni. Di uno di questi casi ci occuperemo nella prossima sezione.

6.4.3 Stabilità rotazionale

Risolviamo il problema proposto dal prof. Ruocco il primo giorno di lezione, e cioè: lanciando un corpo omogeneo con la forma di un parallelepipedo, con i tre lati diversi, nel campo dei gravi tentando di imprimere una velocità angolare rispetto ad uno solo dei tre assi d'inerzia (cioè farlo ruotare su un solo lato), il moto del corpo risulta stabile solo in due casi, mentre in uno dei casi la rotazione non lo è affatto, anche ripetendo più e più volte l'esperienza. Supponiamo di avere questo corpo posto nel campo dei gravi. Il momento della forza peso, poiché si può pensare applicato al centro di massa del corpo, calcolato proprio rispetto al centro di massa è zero perché il braccio di tale forza è nullo. Dunque le equazioni di Eulero diventano omogenee, cioè:

$$\begin{cases} I_{xx} \frac{d\omega_x}{dt} + (I_{zz} - I_{yy})\omega_y\omega_z = 0 \\ I_{yy} \frac{d\omega_y}{dt} + (I_{xx} - I_{zz})\omega_x\omega_z = 0 \\ I_{zz} \frac{d\omega_z}{dt} + (I_{yy} - I_{xx})\omega_x\omega_y = 0 \end{cases}$$

Supponiamo di imprimere al corpo solo la velocità sull'asse d'inerzia lungo le x, e cioè: $\omega_x = \omega_0$, mentre le altre due praticamente nulle. Con le condizioni iniziali:

$$\begin{cases} \omega_x = \omega_0 \\ \omega_z = \omega_y = 0 \end{cases}$$

le soluzioni sono univocamente determinate; al tempo δt si ha che:

$$\omega_x(t + \delta t) = \omega_0 + \frac{d\omega_x}{dt} \delta t$$

che è una soluzione valida per tutti i tempi.

Questa soluzione sembra indicare che il moto è stabile in ognuno dei tre, cioè comunque imprimi una rotazione al corpo in qualunque dei tre assi d'inerzia; invece sperimentalmente si dimostra che ciò è falso... cosa succede?

Una prima osservazione che possiamo fare è che non siamo in grado di imprimere una velocità unicamente lungo un asse d'inerzia principale ma, inevitabilmente, accade che imprimiamo una piccola velocità angolare anche sugli altri assi. Per quantificare questo fatto cambiamo condizioni iniziali e chiamiamo queste piccole velocità ε ; dunque:

$$\begin{cases} \omega_x = \omega_0 \\ \omega_y = \varepsilon_1 \\ \omega_z = \varepsilon_2 \end{cases}$$

con $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ll \omega_0$. Scriviamo le equazioni di eulero (approssimando i ε^2 a 0):

$$\begin{cases} I_{xx} \frac{d\omega_x}{dt} + (I_{zz} - I_{yy}) \underbrace{\omega_y \omega_z}_{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \sim \varepsilon^2 \sim 0} = 0 \\ I_{yy} \frac{d\omega_y}{dt} + (I_{xx} - I_{zz}) \underbrace{\omega_x \omega_z}_{\omega_0 \varepsilon_2} = 0 \\ I_{zz} \frac{d\omega_z}{dt} + (I_{yy} - I_{xx}) \underbrace{\omega_y \omega_x}_{\omega_0 \varepsilon_1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I_{xx} \frac{d\omega_x}{dt} = 0 \Rightarrow \omega_x = \omega_0 \\ I_{yy} \frac{d\varepsilon_1}{dt} + (I_{xx} - I_{zz}) \varepsilon_2 \omega_0 = 0 \\ I_{zz} \frac{d\varepsilon_2}{dt} + (I_{yy} - I_{xx}) \varepsilon_1 \omega_0 = 0 \end{cases}$$

Ora il sistema formato dalle due ultime equazioni nelle due funzioni incognite ε_1 ed ε_2 . Per risolverlo derivi la prima ed ho:

$$I_{yy} \frac{d^2 \varepsilon_1}{dt^2} + (I_{xx} - I_{zz}) \underbrace{\frac{d\varepsilon_2}{dt}}_{\omega_0} = 0$$

e la derivata di ε_2 la prendo dalla seconda equazione. Sostituendo ottengo:

$$\frac{d^2 \varepsilon_1}{dt^2} - \underbrace{\frac{\omega_0^2}{I_{zz} I_{yy}} (I_{xx} - I_{zz})(I_{yy} - I_{xx})}_{\lambda^2} \varepsilon_1 = 0$$

così ho la seguente equazione differenziale lineare omogenea del secondo grado:

$$\frac{d^2 \varepsilon_1}{dt^2} - \lambda^2 \varepsilon_1 = 0, \quad \lambda^2 = \frac{(I_{xx} - I_{zz})(I_{yy} - I_{xx})}{I_{zz} I_{yy}}$$

Proviamo a risolverla con una soluzione del tipo: $\varepsilon_1(t) = e^{i\alpha t}$. Le derivate prima e seconda sono:

$$\frac{d\varepsilon_1(t)}{dt} = i\alpha e^{i\alpha t} \quad \frac{d^2\varepsilon_1(t)}{dt^2} = -\alpha^2 e^{i\alpha t}$$

Sostituendo si ottiene:

$$-\alpha^2 e^{i\alpha t} - \lambda^2 e^{i\alpha t} = 0 \Rightarrow e^{i\alpha t}(-\alpha^2 - \lambda^2) = 0 \Rightarrow \alpha^2 = -\lambda^2 \Rightarrow \alpha = \pm i\lambda$$

Dunque se $\alpha = \pm i\lambda$ la soluzione è $e^{\pm\lambda t}$. Ora studiamo questa funzione:

$$\varepsilon_1(t) = e^{\pm\lambda t} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \lambda^2 > 0 \\ \lambda \in \mathbb{R} \\ e^{\pm\lambda t} \end{array} \right. \Rightarrow \underbrace{\text{si ha una grande deviazione poiché c'è un termine esponenziale}}_{\text{MOTO INSTABILE}} \\ \left\{ \begin{array}{l} \lambda^2 < 0 \\ \lambda \in \mathbb{C} \\ \varepsilon_1 = \begin{cases} \sin \lambda t \\ \cos \lambda t \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \underbrace{\text{si ha una piccola deviazione}}_{\text{MOTO STABILE}} \end{array} \right.$$

Studiamo ora il termine λ^2 :

$$\lambda^2 = \frac{(I_{xx} - I_{zz})(I_{yy} - I_{xx})}{I_{zz}I_{yy}},$$

supponendo di mettere il corpo in rotazione intorno a I_{xx} . Si possono avere tre casi:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{CASO I} \left\{ \begin{array}{l} I_{xx} < I_{yy}, I_{zz} \\ \lambda^2 < 0 \end{array} \right. \Rightarrow \text{MOTO STABILE} \\ \text{CASO II} \left\{ \begin{array}{l} I_{xx} > I_{yy}, I_{zz} \\ \lambda^2 < 0 \end{array} \right. \Rightarrow \text{MOTO STABILE} \\ \text{CASO III} \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} I_{yy} < I_{xx} < I_{zz} \\ \text{oppure} \\ I_{zz} < I_{xx} < I_{yy} \end{array} \right. \\ \lambda^2 > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \text{MOTO INSTABILE} \end{array} \right.$$

In qualche caso λ^2 può essere anche uguale a zero, ad esempio nel caso in cui facciamo ruotare un corpo rigido sull'asse d'inerzia intermedio e si ha la cosiddetta instabilità marginale che aumenta linearmente col tempo, e si ha una soluzione dell'equazione differenziale del tipo: $\varepsilon_1(t) = at + b$.

Questo vuol dire che dopo un piccolo tempo t , ε_1 non è più una perturbazione trascurabile rispetto a ω_x , quindi salta l'ipotesi iniziale, e il moto non è più studiabile semplicemente usando l'approssimazione $\varepsilon_1 \ll \omega_x$.

6.5 La trottola

Un esempio di applicazione del momento angolare e del momento delle forze, è lo studio della trottola. Scegliendo un sistema di riferimento cartesiano tridimensionale con la punta della trottola nell'origine, possiamo schematizzare l'oggetto come segue:

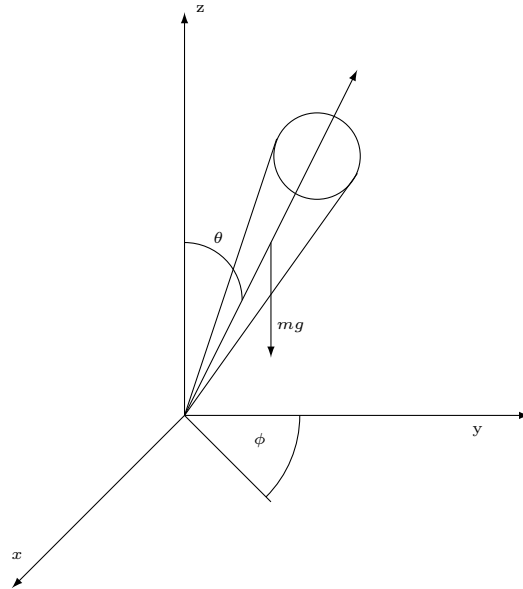


Figura 6.10: Trottola

Nel caso illustrato in Figura 6.10, se consideriamo l'origine come polo, si vede che l'unica forza esterna che produce momento è la forza peso, applicata nel centro di massa, a distanza R , dal polo (nel nostro caso, l'origine); avendo chiamato θ l'angolo di inclinazione con la verticale e ϕ l'angolo che forma la proiezione dell'asse di rotazione sul piano xy , con l'asse delle y , possiamo scrivere τ nelle sue componenti:

$$\begin{cases} \tau_x = M \cdot g \cdot R \sin(\theta) \cos(\phi) \\ \tau_y = M \cdot g \cdot R \sin(\theta) \sin(\phi) \\ \tau_z = 0 \end{cases}$$

Ora un momento nullo lungo z implica che la componente del momento angolare lungo z sia costante nel tempo, e che a cambiare debbano essere le componenti x e y . Ora dalla relazione $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$, possiamo scrivere esplicitando il rapporto incrementale:

$$\vec{L}(t + \Delta t) = \vec{L}(t) + \vec{\tau}\Delta t$$

Allora il modulo di $\vec{L}(t + \Delta t)$ sarà:

$$|L(t + \Delta t)| = \sqrt{L^2 + \tau^2\Delta t^2} \approx L(1 + \frac{\tau^2}{2L^2}\Delta t^2 \dots) \approx L$$

Dove si è sviluppata la radice in serie di Taylor approssimando al primo grado. Da questo risultato, si vede come il modulo del momento angolare rimane costante nel tempo, viene da domandarsi allora quale effetto provoca il momento della forza peso, dato che tutto sembra mantenersi costante nel tempo! dato che lungo z non succede niente di interessante passiamo in due dimensioni e vediamo cosa succede nel piano xy (vedi figura 6.11).

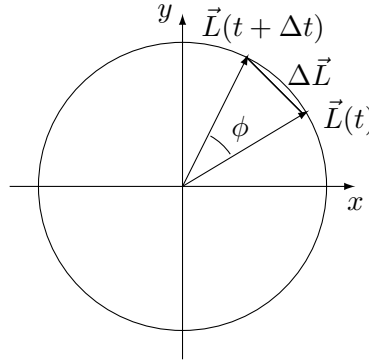


Figura 6.11: Proiezione sul piano xy

Ora da considerazioni geometriche abbiamo che:

$$2\sqrt{L_x^2 + L_y^2} \cdot \sin \frac{\phi}{2} = |\Delta L| = |\tau| \cdot \Delta t$$

ora se consideriamo tempi molto piccoli, tanto da poter approssimare $\sin \frac{\phi}{2} = \frac{\phi}{2}$, otteniamo:

$$\sqrt{L_x^2 + L_y^2} \cdot \Delta\phi = |\tau| \cdot \Delta t \longrightarrow \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{|\tau|}{\sqrt{L_x^2 + L_y^2}}$$

Ora basta notare che:

- $|\tau| = \sqrt{(M \cdot g \cdot R \sin(\theta) \cos(\phi))^2 + (M \cdot g \cdot R \sin(\theta) \sin(\phi))^2} = M \cdot g \cdot R \sin(\theta)$

- $\sqrt{L_x^2 + L_y^2} = L \sin \theta$

Da cui, sostituendo e semplificando i seni:

$$\frac{\Delta \phi}{\Delta t} = \frac{M \cdot g \cdot R}{L}$$

Ora definiamo velocità angolare di precessione la quantità, $\Omega = \frac{\Delta \phi}{\Delta t}$; quindi avremo:

$$\Omega = \frac{M \cdot g \cdot R}{I \cdot \omega}$$

Ecco perché quanto più veloce è la trottola tanto più lenta sarà la velocità di precessione, e al rallentare di ω la velocità Ω aumenta, questo effetto è osservabile nelle trottole reali, che alla fine della corsa tendono a roteare più velocemente attorno alla verticale⁴.

⁴Tutto quanto detto vale nel caso di fast top, ossia di rotatore veloce, quando $\Omega \ll \omega$, poichè si deve avere $L \ll I \omega$.

Capitolo 7

Le Onde

Un'onda è la propagazione di una perturbazione in un sistema continuo. Un'onda trasporta un impulso di energia senza trasportare materia.

Se la dinamica dei singoli elementi di massa che compongono il mezzo nel quale l'onda si propaga è ortogonale alla direzione di propagazione dell'impulso si parla di onde *trasversali*, se invece sono paralleli le onde sono *longitudinali*.

Per via dei deboli legami che uniscono le molecole nei fluidi e nei gas le uniche onde possibili in questi mezzi sono longitudinali, sono infatti onde longitudinali le onde acustiche. Sia nei solidi che nelle superfici dei fluidi (per via della tensione superficiale) sono possibili le onde trasversali.

Sono onde trasversali le radiazioni elettromagnetiche.

Un'onda per essere considerata tale deve soddisfare una particolare equazione, detta equazione delle onde.

7.1 Equazione delle onde

Dal punto di vista fisico una funzione d'onda è una particolare funzione matematica dello spazio e del tempo che ha la caratteristica che, dopo un intervallo di tempo Δt la funzione presenta la stessa forma di prima, ma è spostata di una quantità pari a $v\Delta t$.

Quindi tutte le onde devono essere del tipo:

$$\mu(x \pm vt)$$

Supponiamo ora per semplicità di scegliere $\mu(x - vt)$. Costruiamo la variabile s in questo modo:

$$s = x - vt \quad \mu(s)$$

Calcoliamo ora i termini:

$$\frac{\partial^2 \mu(s)}{\partial t^2} \quad \frac{\partial^2 \mu(s)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial \mu(s)}{\partial t} = \frac{\partial \mu(s)}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial t} = -v \frac{d\mu(s)}{ds}$$

Ricordando che:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d(x - vt)}{dt} = -v$$

Procediamo al calcolo della derivata seconda:

$$\frac{\partial^2 \mu(s)}{\partial t^2} = -v \frac{\partial^2 \mu(s)}{\partial s^2} \cdot \frac{\partial s}{\partial t} = v^2 \frac{d^2 \mu}{ds^2}$$

Quindi abbiamo ottenuto che:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mu}{dt^2} &= v^2 \frac{d^2 \mu}{ds^2} \\ \frac{d^2 \mu}{ds^2} &= \frac{1}{v^2} \frac{d^2 \mu}{dt^2} \end{aligned} \tag{7.1}$$

L'equazione (7.1) è detta equazione differenziale delle onde.

7.2 Ricavare l'equazione delle onde nel caso di corda vibrante

Fin ora abbiamo fatto solo considerazioni matematiche sull'equazione delle onde, adesso proveremo a ricavare questa equazione nel caso unidimensionale più semplice, la corda vibrante.

Scegliamo un sistema conveniente, come quello mostrato in Figura 7.1. In questo sistema la corda è sottoposta a una doppia tensione esercitata dal muro e dalla carrucola, e tenuta ferma.

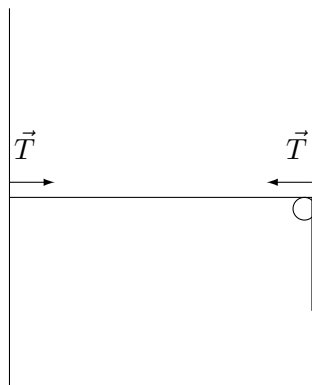


Figura 7.1: Corda sottoposta a tensione

Se facciamo uno zoom in un elementino di corda di lunghezza infinitesima (dl) notiamo che su di esso si esercitano due forze uguali e contrarie (Figura 7.2).

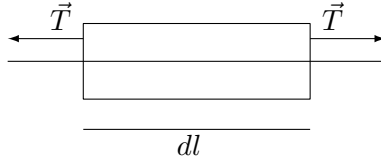


Figura 7.2: Forze che agiscono su un elementino infinitesimo dl .

Quando la corda non è soggetta a perturbazioni rimane in stato di riposo, poiché tutte le forze che agiscono sul sistema si annullano a vicenda. Adesso supponiamo di pizzicare la corda in un punto, e studiare al momento del rilascio quali sono le forze che governano il moto della corda (Figura 7.3).

Dalla figura risulta evidente che l'elementino dl è la base di un triangolo isoscele che ha per lati R e angolo tra i due lati uguali θ . Risulta quindi vero in base a semplici relazioni trigonometriche che:

$$2R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = dl \quad \frac{dl}{R} = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Ricaviamo ora la componente perpendicolare della tensione \vec{T} , che è l'unica che fa compiere moto, poiché le due componenti orizzontali si annullano a vicenda.

$$\vec{T}_{\perp} = \vec{T} + \vec{T} = -2T \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \hat{y}$$

Ricordando la relazione scritta precedentemente:

$$T_{\perp} = T \frac{dl}{R}$$

Tutto il problema di ricavare l'equazione del moto, che avviene solo lungo y è ora ridotto a quello di trovare una corretta espressione di R .

Ricordiamo che la formula della circonferenza è:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

Deriviamo:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

Deriviamo un'altra volta:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2}} - \frac{x^2}{(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

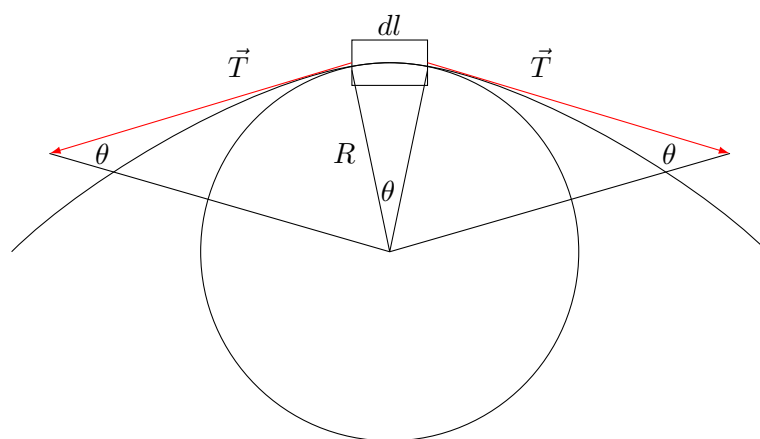


Figura 7.3: Schema delle forze che agiscono su un elementino dl di filo sottoposto a tensione

Adesso possiamo fare la furbata di calcolare la derivata seconda di y intorno allo 0 (la posizione di dl) per far sparire un po di termini e ricavare un'espressione di R rispetto la derivata seconda di y (ricordiamo che abbiamo fatto tutto il ragionamento per l'elementino dl che si trova sulla sommità del cerchio, sarebbe stato possibile farlo per qualunque posizione, ma avremmo dovuto considerare questa posizione e ricavare R da questa relazione sarebbe stato compito assai più arduo).

$$\left[\frac{d^2y}{dx^2} \right]_{x=0} = \frac{1}{R}$$

Possiamo quindi tornare a scrivere l'espressione della forza perpendicolare:

$$T_{\perp} = T dl \cdot \frac{d^2y}{dx^2}$$

Per il secondo principio di Newton, T_{\perp} è l'unica forza che fa muovere l'oggetto quindi è vero che $F = ma$ (la massa dell'elementino è dm e l'accelerazione è la derivata seconda di y fatta rispetto al tempo):

$$T_{\perp} = dm \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$T dl \frac{d^2y}{dx^2} = dm \frac{d^2y}{dt^2}$$

Poiché y è funzione di x , ma anche funzione di t , passiamo alla notazione delle derivate parziali.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \left(\frac{dm}{dl} \right) \frac{1}{T} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Definiamo una costante v in questo modo:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\frac{dm}{dl}}}$$

Che ha le dimensioni di una velocità e sostituiamola nell'espressione precedente, per ottenere l'equazione delle onde:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Che è un'equazione differenziale alle derivate parziali.

In questo modo abbiamo anche ottenuto un modo per sapere la velocità delle onde nei mezzi unidimensionali, definendo infatti la densità lineare come:

$$\rho = \frac{dm}{dl}$$

Possiamo scrivere:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

Per tanto le onde si propagano tanto più velocemente quanto maggiore è la tensione applicata al filo, e tanto minore è la densità del filo. Questo è il principio attraverso cui si accordano gli strumenti musicali a corda. Infatti girando le chiavi di una chitarra si applica una tensione maggiore alla corda, che vibrerà più velocemente emettendo suoni più acuti. Allo stesso modo, le corde più gravi dello strumento hanno una densità maggiore, a cui corrisponde una velocità di oscillazione più piccola, e quindi suoni più gravi.

7.3 Equazione delle onde a più dimensioni

Fino ad ora abbiamo trattato il caso semplice delle onde che viaggiano su mezzi unidimensionali, accenniamo soltanto come si scrive l'equazione delle onde per propagazione in mezzi a più dimensioni, in particolare vediamo come è fatta la funzione di propagazione delle onde nello spazio tridimensionale.

Questa sarà la densità o la pressione in funzione della posizione e del tempo:

$$\rho(x, y, z, t)$$

L'equazione delle onde che deve soddisfare questa funzione è semplicemente:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}$$

Questa equazione può essere lunga da scrivere, per cui spesso si ricorre all'operatore differenziale ∇ , definito nella definizione 15, nella sezione 4.3 (l'operatore ∇^2 è detto laplaciano). In particolare si può scrivere:

$$\nabla^2 \rho = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}$$

Ma ancora una volta è possibile ridurre la scrittura:

$$\nabla^2 \rho - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = 0$$

Definiamo un nuovo operatore differenziale per rendere questa espressione molto più compatta

Definizione 28 (Operatore d'alambertiano) *Si definisce l'operatore differenziale \square in questo modo*

$$\square = \left(\nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right)$$

Dopo questa definizione l'equazione delle onde risulta scritta in maniera molto compatta:

$$\square \rho = 0$$

7.4 Serie di Fourier per descrivere le onde

Abbiamo visto che tutte le equazioni del tipo

$$\mu(x \pm vt)$$

soddisfano l'equazione delle onde, ma sono ancora tantissime soluzioni, come trovarle tutte?

Ansitutto l'equazione delle onde è lineare, questo implica che qualunque combinazione lineare di funzioni che sono soluzioni è a sua volta soluzione. Ad esempio l'equazione così costruita sarà una soluzione:

$$y(x, t) = A \cdot f(x + vt) - B \cdot g(x - vt)$$

Una funzione analitica che conosciamo benissimo che soddisfa l'equazione delle onde è la funzione *seno*, cerchiamo quindi le soluzioni nelle combinazioni lineari di questa funzione:

$$y(x, t) = A \sin(x - vt) + B \sin(x + vt)$$

Anche questa è una soluzione delle equazioni delle onde, a partire da questa costruiamone ora una che la più generica possibile: infatti possiamo continuare a sommare tra loro funzioni seno all'infinito:

$$y(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin [(x - vt) k] + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin [(x + vt) k] \quad (7.2)$$

Dove A_k e B_k sono generici coefficienti, $k \in \mathbb{N}$. Per il teorema di Fourier¹ sulle serie di seni qualunque funzione è esprimibile come somma di seni o coseni, in particolare quindi questa funzione rappresenta tutte le funzioni che sono soluzione dell'equazione delle onde.

7.5 La corda vibrante, produzione degli armonici

Abbiamo nello scorso paragrafo ottenuto la soluzione generica per delle onde, studiando adesso le condizioni iniziali, possiamo risolvere, almeno in teoria, tutti i moti ondulatori unidimensionali.

¹La dimostrazione del teorema di Fourier esula dallo scopo di questi appunti

Un caso particolarmente interessante riguarda quello di una corda vibrante, che è fissata agli estremi. In questo caso dunque, se la corda ha lunghezza L , vanno imposte le condizioni seguenti:

$$y(0, t) = 0 \quad y(L, t) = 0$$

In poche parole il valore di y per $x = 0$ e $x = L$ deve essere sempre fisso a 0. Applicando questo all'equazione 7.2 otteniamo la seguente soluzione:

$$A_k = -B_k$$

Infatti per $x = 0$ i termini sinusoidali per uguali valori di k devono annullarsi a vicenda, e questo è possibile solo se i coefficienti sono uguali in modulo ma di segno opposto. L'altra condizione che si ottiene è che k non può assumere tutti i valori consentiti, ma solo i multipli di un valore fondamentale:

$$k = \frac{2\pi}{L} \cdot n \quad n \in \mathbb{N}$$

Infatti per $x = L$ devono coincidere i valori dei seni:

$$\sin[(L - vt)k] = \sin[(L + vt)k]$$

Da cui si ricava che

$$k = \frac{2\pi}{L} \cdot n$$

Per cui la soluzione dell'equazione del moto è qualcosa del genere:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \left[\frac{2\pi}{L} n (x \pm vt) \right]$$

Definiamo adesso alcune costanti per semplificare tutto:

$$\lambda = \frac{L}{n} \quad \omega = \frac{2\pi}{L} nv$$

Dove λ è la lunghezza d'onda e ω è la pulsazione, l'equazione diventa:

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\omega t \pm \varphi)$$

Riscriviamo dunque il significato di tutte le costanti inserite nella formula:

$$k = \frac{2\pi}{L} n \quad \omega = \frac{2\pi}{L} nv$$

Dove k è il numero d'onda:

$$\omega = kv \quad \lambda = \frac{L}{n} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Questo significa che la corda oscilla con un numero infinito di lunghezze d'onda che sono tutte sottomultipli di L . Poiché la velocità del suono è costante e possiamo scriverla come:

$$v = \nu\lambda$$
$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{L} \cdot n$$

Quindi sono tutti multipli di una frequenza fondamentale. Queste frequenze discrete che si producono sono responsabili delle differenze di timbro dei vari strumenti musicali, non che alla base di tutto il sistema armonico musicale.

Capitolo 8

Fluidi

I fluidi sono sostanze deformabili, i cui legami interni non sono forti come nei solidi, che formano strutture cristalline rigide, né deboli come nei gas, dove non consentono di raggrupparsi.

Studiare i fluidi è più complesso che non studiare i corpi rigidi, poiché il sistema ha molti più gradi di libertà. Tuttavia è possibile semplificare il problema introducendo alcune grandezze fisiche e studiare la loro evoluzione temporale invece di risolvere le equazioni del moto delle particelle. Questo approccio è detto *euleriano*, poiché si sfruttano le caratteristiche di campo, finora applicate alle forze, per risolvere il moto del fluido; l'approccio del problema classico risolvendo le equazioni del moto di una singola particella è detto invece *lagrangiano*.

Noi ci concentreremo sull'approccio *euleriano*.

8.1 Grandezze fondamentali per descrivere i fluidi

Definiamo subito alcune grandezze importanti.

8.1.1 Densità

In ogni punto del fluido è possibile individuare una **densità**

Definizione 29 (Densità) *Si definisce **densità** di un fluido la quantità*

$$\rho = \frac{dm}{dV} \quad \left[\frac{Kg}{m^3} \right]$$

Per passare dalle quantità infinitesime alle quantità finite è possibile definire anche la densità media

$$\bar{\rho} = \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

O la densità relativa:

$$\rho_r = \frac{\rho}{\rho_{H_2O}(3.8^\circ \text{ C})} \quad \text{dove } \rho_{H_2O}(3.8^\circ \text{ C}) = 10^3 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$$

La densità di qualsiasi fluido è una funzione della sua temperatura, in particolare l'acqua ha un massimo della densità proprio per $T = 3.8^\circ \text{ C}$. Questo è il motivo per cui il ghiaccio, avente densità inferiore all'acqua, galleggia.

8.1.2 Pressione

In ogni punto interno al fluido è possibile misurarne una grandezza chiamata Pressione, così definita.

Definizione 30 (Pressione) *Si definisce pressione di un fluido il rapporto tra forza esercitata e superficie*

$$P = \frac{dF_n}{dS} \quad [Pa]$$

Per capire bene il concetto di pressione supponiamo di fare il seguente esperimento: Immergiamo in un recipiente pieno di un fluido un meccanico con una molla sotto vuoto e misuriamo di quanto si sposta il pistone, il rapporto tra la forza (misurata con lo spostamento del pistone) e la superficie dello stesso pistone da una misura della pressione in quel punto (Figura 8.1).

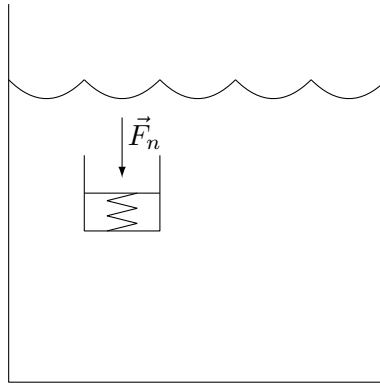


Figura 8.1: La forza \vec{F}_n che agisce sulla superficie del pistone genera la pressione

8.1.3 Altre grandezze

Altre grandezze che approfondiremo nella parte di fluido dinamica sono lo *sforzo di taglio*

Definizione 31 (Sforzo di taglio) Lo sforzo di taglio è il rapporto tra la forza che agisce parallelamente al pistone e la superficie del pistone stesso.

$$\sigma = \frac{dF_t}{dS} \quad \left[\frac{N}{m^2} \right]$$

Come si può notare non abbiamo usato i Pascal per esprimere le unità di misura dello sforzo di taglio, si è scelto così per non confonderlo con la pressione.

Altre grandezze che definiremo più avanti sono la *tensione superficiali*, *coefficiente di viscosità* e *numero di Reynolds*.

8.2 Fluido-statica

Entriamo ora nello studio di come si comportano le grandezze fisiche definite fino ad ora nel caso più semplice: la statica. La grandezza più interessante da studiare, in questo caso, è la pressione.

Per studiare come si comporta la pressione al variare dell'altezza basta fare un po di considerazioni sulle forze che agiscono sul fluido (Figura 8.2)

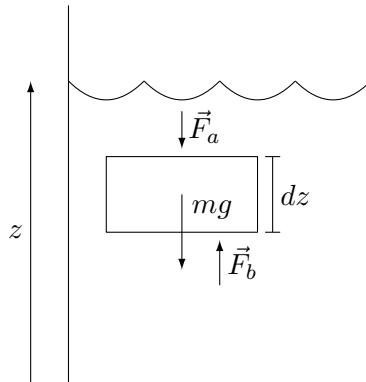


Figura 8.2: Ogni elemento di volume all'interno di un liquido statico è fermo, questo vuol dire che le forze che agiscono su questo elemento si bilanciano tra di loro

Poiché l'elemento di volume preso in considerazione è in *statica*, questo vuol dire che le forze che agiscono si bilanciano:

$$\vec{F}_a + \vec{F}_b + m\vec{g} = 0$$

$$F_b = F_a + m_g$$

Definiamo ora la funzione $P(z)$ che indica la pressione ad una certa quota z , chiamiamo A la superficie del nostro parallelepipedo infinitesimo

$$F_b = A \cdot P(z) \quad F_a = A \cdot P(z + dz)$$

Supponiamo che la densità ρ sia costante in ogni punto, possiamo scrivere la forza peso in questo modo

$$mg = \rho A dz g$$

Da cui:

$$A \cdot P(z) - A \cdot P(z + dz) = \rho A \cdot g dz$$

$$P(z) - P(z + dz) = g \rho dz$$

$$\frac{P(z + dz) - P(z)}{dz} = -g \rho$$

$$\frac{dP}{dz} = -g \rho$$

Questo significa che la derivata prima della funzione P rispetto a z è negativa, quindi P decresce all'aumentare di z . È possibile scrivere in forma vettoriale la stessa equazione ricordando che le se x e y sono assi paralleli alla superficie dell'acqua la pressione non cambia al variare di x e y , e quindi le derivate parziali sono nulle:

$$\nabla P = \rho \vec{g}$$

In particolare questo avviene in presenza del campo della forza peso. In linea del tutto generale possiamo estendere il concetto a qualunque campo di forze conservativo, sia infatti \vec{H} il campo di forze conservativo che agisce sul fluidorisulta vera l'equazione

$$\vec{\nabla} P = \rho \vec{H}$$

In particolare se U è il potenziale di H (ricordiamoci che H è conservativo quindi esiste sempre il potenziale U)

$$\vec{\nabla} P = \rho \vec{\nabla} U$$

8.2.1 Legge di Stevino

Supponiamo che ρ sia costante

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g$$

$$dP = -\rho g dz$$

$$\int_{P_1}^{P_2} dP = -\rho \int_{z_1}^{z_2} dz$$

$$\Delta P = -\rho g \Delta z$$

Consideriamo P_0 la pressione alla superficie, h la profondità:

$$P - P_0 = -\rho g (h_0 - h)$$

Si noti che il valore $h_0 - h$ è negativo, scegliamo $h_0 = 0$

$$P = P_0 + \rho g h \tag{8.1}$$

8.2.2 Principio di Pascal

Il principio di Pascal afferma che aumentando la pressione sulla superficie di un fluido ideale questa si distribuisce in maniera omogenea in tutto il fluido, si può notare che è una diretta conseguenza dell'equazione 8.1 (legge di Stevino). Sia infatti ΔP l'incremento di pressione e $P_1 = P_0 + \Delta P$, per la legge di Stevino vale che:

$$P = P_0 + \rho gh$$

$$P + \Delta P = P_0 + \Delta P \rho gh$$

$$P + \Delta P = P_1 + \rho gh$$

Da cui la pressione in ogni punto del liquido sarà aumentata esattamente di ΔP .

Questo principio è applicato al *torchio idraulico*, un particolare tipo di leva che sfrutta proprio questo principio (Figura 8.3).

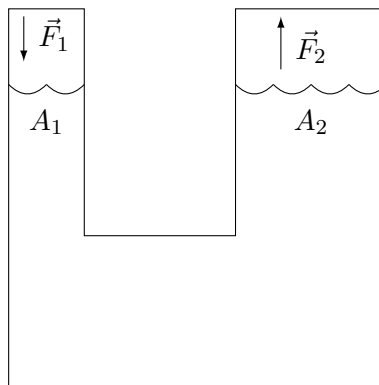


Figura 8.3: Applicando una forza sulla superficie minore del torchio A_1 , la pressione si propaga fino all'altra superficie A_2 generando una forza in uscita F_2

Il torchio idraulico è un dispositivo che ha due superfici differenti A_1 e A_2 , applicando una pressione su una di queste superfici attraverso una forza, questa si propaga fino all'altra superficie: Poiché le due superfici sono alla stessa altezza le due pressioni si equivalgono.

$$P_1 = P_2$$

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

$$F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1}$$

Da cui otteniamo che se $A_2 \gg A_1$ allora anche la forza F_2 è molto più grande di F_1 .

Tuttavia, come ogni leva questo sforzo viene pagato in termini di spostamento, infatti l'altezza per cui riesco a sollevare A_2 vale:

$$\Delta l_2 = \frac{A_1}{A_2} \Delta l_1$$

Dove ho sfruttato la conservazione del volume. Questo indica che se $A_2 \gg A_1$ lo spostamento Δl_2 sarà molto piccolo.

8.2.3 Barometro di Torricelli

Quello di Torricelli fu il primo barometro nella storia. Per misurare la pressione atmosferica riempi un tubo di mercurio e lo rovesciò dentro una vasca d'acqua (Figura 8.4).

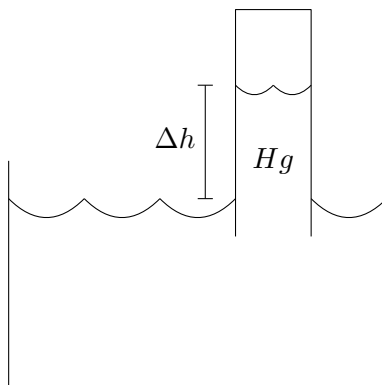


Figura 8.4: Barometro di Torricelli

Possiamo subito dire che la forza di gravità che spinge verso il basso il mercurio deve essere bilanciata dalla forza di pressione atmosferica, quindi in particolare la pressione che si sviluppa alla base della colonna di mercurio dovrà essere pari alla pressione atmosferica, poiché sta alla stessa quota della bacinella maggiore:

$$P(z) = \rho_{Hg} g \Delta h$$

Se Torricelli avesse usato acqua al posto del mercurio, quanto sarebbe dovuta essere lunga la canna per poter misurare la pressione atmosferica?

Essendo la stessa pressione $P(z)$ dobbiamo sfruttare la seguente relazione:

$$\rho_{H_2O} g \Delta h_{H_2O} = \rho_{Hg} g \Delta h_{Hg}$$

$$\Delta h_{H_2O} = \frac{\rho_{Hg}}{\rho_{H_2O}} \Delta h_{Hg}$$

Sapendo che $\Delta h_{Hg} = 760 \text{ mm}$ e che $\rho_{Hg} = 13000 \text{ Kg/m}^3$

$$\Delta h_{H_2O} = 10.34 \text{ m}$$

Questo ci dice che ogni 10 metri di profondità nell'acqua aumenta la pressione di un'atmosfera.

8.2.4 Pressione atmosferica

Come varia la pressione atmosferica al variare della quota?

Possiamo semplificare il conto supponendo in prima approssimazione che l'atmosfera sia un gas la cui temperatura non dipenda dalla quota, il che in generale non è vero, ma per basse quote può essere una buona approssimazione.

In queste condizioni possiamo dire che:

$$\rho \neq \text{cost} \quad PV = \text{cost}$$

A questo punto possiamo dire che:

$$\frac{P(z)}{\rho(z)} = \frac{P(z)}{m} \cdot V = \frac{P \cdot V}{m} = \text{cost}$$

Quindi è costante il rapporto tra pressione e densità, possiamo scrivere la relazione:

$$\begin{aligned} \frac{P}{\rho} &= \frac{P_0}{\rho_0} \\ \frac{dP}{dz} &= -\rho g = -\frac{\rho_0}{P_0} g P(z) \\ \int_{P_0}^P \frac{dP}{P} &= \int_0^z -\frac{\rho_0}{P_0} g dz \\ \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) &= -\frac{\rho_0}{P_0} g z \\ P &= P_0 e^{-\frac{\rho_0}{P_0} g z} \end{aligned}$$

L'andamento della pressione atmosferica segue in prima approssimazione quello di un esponenziale decrescente, mostrato in Figura 8.5

8.2.5 Forza d'archimede

Proviamo ora a dedurre dalla definizione di statica un'altra importante forza. Nel fluido in statica tutti gli elementini di volume si trovano fermi, questo vuol dire che la somma delle forze che agiscono sul volume si annullano. Suddividiamo queste forze in interne ed esterne, le forze esterne sono forza peso e reazione che applicano le molecole di fluido esterne al nostro volume, interne sono quelle che le molecole del fluido del volumetto applicano reciprocamente.

Come ormai sappiamo bene, per il terzo principio della dinamica, la somma delle forze interne è nulla, rimangono le forze esterne. La forza peso

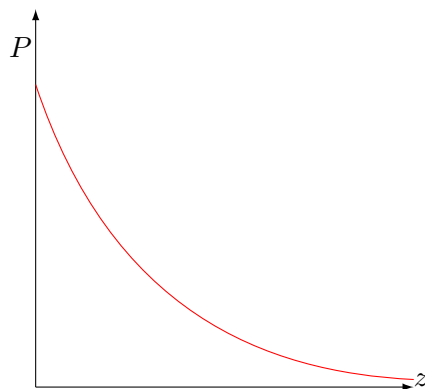


Figura 8.5: Andamento della pressione in funzione della quota z .

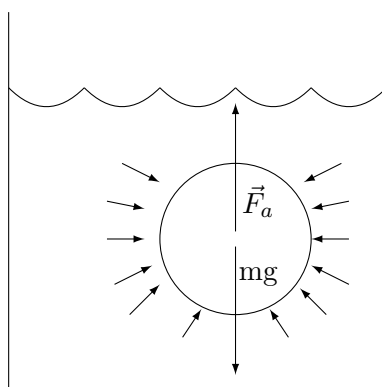


Figura 8.6: Schema delle forze che agiscono su ogni elemento di volume di un fluido

è facile da schematizzare, in quanto si applica al centro di massa ed è pari alla massa totale per l'accelerazione di gravità (Figura 8.6)

$$F_a = mg = \bar{\rho}_f V g$$

Come si vede l'importante è solo la densità media del fluido. Per studiare la condizione di galleggiamento basta dire che la forza di archimede si esercita solo sulla porzione di oggetto che è immersa nel fluido, mentre la forza peso è calcolata su tutto l'oggetto, questo fa sì che se la densità media dell'oggetto è minore di quella del fluido si stabilisce un equilibrio di galleggiamento dove le due forze si bilanciano, in corrispondenza di questo equilibrio si ha un minimo del potenziale:

$$\rho_f V_{imm} g = \rho_c V_{tot} g \quad \text{dove} \quad \begin{cases} \rho_f = \text{densità media del fluido} \\ \rho_c = \text{densità media dell'oggetto} \\ V_{imm} = \text{volume della parte immersa} \\ V_{tot} = \text{volume totale dell'oggetto} \end{cases}$$

$$V_{imm} = \frac{\rho_c}{\rho_f} V_{tot}$$

Il fatto che si sia usata la densità media spiega perché le navi galleggiano, infatti pur essendo la densità delle componenti metalliche della nave molto superiore a quelle dell'acqua, queste hanno interi settori pieni d'aria (o vuoto) di grande volume, in modo da rendere la densità media della nave inferiore a quella del fluido, consentendo il raggiungimento di un equilibrio di galleggiamento.

8.2.6 Paraboloide di rotazione

La superficie di un fluido quando esso è soggetto unicamente alla forza peso è piatto, in realtà in assenza di forze esso tenderebbe ad assumere una forma sferica, per i motivi che analizzeremo meglio quando parleremo di tensione superficiale.

Cosa succede quando mettiamo in rotazione una vasca piena d'acqua? Si forma una figura a gorgo chiamata paraboloide di rotazione, andiamo a vedere perché:

Prima di tutto facciamo una semplice osservazione, perché una superficie sia stabile la pressione in ogni punto della superficie deve essere uguale, per imporre questa condizione è necessario ricorrere all'equazione fondamentale della statica dei fluidi:

$$\vec{\nabla} P(z) = -\rho \vec{\nabla} U$$

A questo punto dobbiamo scrivere la formula del potenziale U che non è più solo dettato dalla forza peso, ma anche dalla rotazione, e quindi dalla forza centripeta (Figura 8.7).

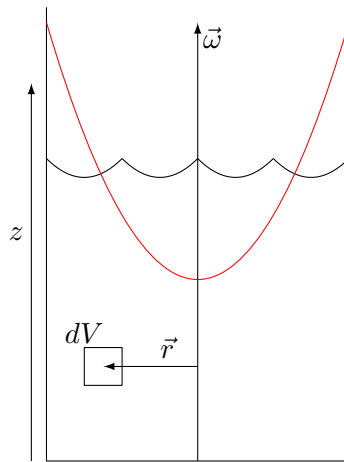


Figura 8.7: Schema di un fluido sottoposto a un campo di forze diverso dalla forza peso

Le forze che agiscono su un elemento dV di volume sono:

$$F = - \underbrace{\rho dV g}_{\text{Forza peso}} + \underbrace{\omega^2 r \rho dV}_{\text{Forza centripeta}}$$

Poiché questa è una forza conservativa cerchiamo il potenziale:

$$U = - \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = \rho dV g \int dz - \rho dV \omega^2 \int r^2 dr$$

$$U = \rho dV g z - \frac{1}{2} \rho dV \omega^2 r^2$$

Quindi ora che abbiamo ricavato un espressione per il potenziale sfruttiamo l'equazione fondamentale della statica:

$$\vec{\nabla} P = -\rho \vec{\nabla} U$$

Tuttavia se sulla superficie la pressione è costante $\vec{\nabla} P = 0$.

$$\vec{\nabla} U = 0$$

Quindi questo significa che anche il potenziale in questa superficie è costante.

$$\rho dV g z - \frac{1}{2} \rho dV \omega^2 r^2 = \text{cost}$$

$$g z - \frac{1}{2} \omega^2 r^2 = \text{cost}$$

$$z = a + b r^2$$

La formula appena ottenuto è proprio quella di un paraboloide. Con lo stesso procedimento è possibile studiare le equazioni delle superfici in presenza di qualsiasi campo di forze.

8.2.7 Tensione superficiale

La tensione superficiale è una grandezza che indica la forza con cui le molecole del fluido sono trattenute all'interno del fluido stesso. In un fluido questa forza è maggiore dell'energia cinetica delle molecole che tenderebbe a disperdere il fluido proprio come avviene per i gas.

Ogni particella situata sulla superficie del fluido risente dell'attrazione di tutte le particelle interne, e quindi riceve una spinta a rimanere nel fluido, maggiore sarà la superficie esposta, maggiore sarà la forza che si esercita sul fluido stesso. In assenza di forze esterne che fanno assumere al fluido una particolare forma, come la gravità, questo tende automaticamente a minimizzare il potenziale associato a questa forza, ovvero tende a disporre il maggior numero di molecole possibile all'interno, minimizzando la superficie esterna.

Il solido che presenta minore superficie esterna a parità di volume è proprio la sfera, è questa la forma che acquista un fluido in assenza di forze esterne.

Per dare una definizione più scientifica alla tensione superficiale facciamo il seguente esperimento: prendiamo una lamina di fluido fissata e fissiamola ad una sbarretta mobile di metallo, questa svilupperà automaticamente una forza per tentare di ridurre la superficie del fluido spostando la sbarretta (Figura 8.8).

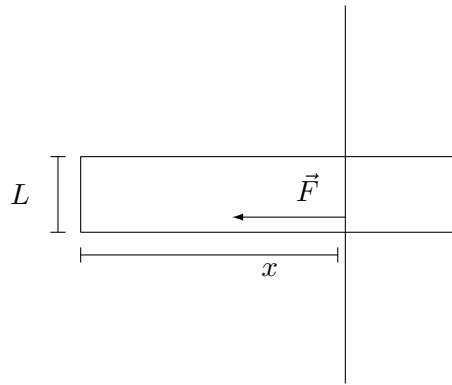


Figura 8.8: Il fluido tende a ridurre la superficie esterna

Abbiamo affermato prima che il potenziale è proporzionale alla superficie:

$$U \propto S = 2Lx$$

Da cui la forza che si sviluppa:

$$F = \frac{dU}{dx} \propto 2L$$

Si introduce il coefficiente di tensione superficiale quel numero γ tale che

$$U = 2\gamma Lx$$

Definizione 32 (Coefficiente di tensione superficiale) *Il coefficiente di tensione superficiale γ è quel numero che lega Potenziale e superficie di un fluido:*

$$U = \gamma S$$

Se si prova a fare l'esperimento suddetto con acqua si scopre che è estremamente difficile generare una lamina d'acqua. Questo perché il coefficiente di tensione superficiale dell'acqua è molto alto, e la forza molto elevata che si sviluppa fa collassare immediatamente l'acqua in bollicine piccole.

Tuttavia si può ricorrere a un trucco, il sapone infatti ha le proprietà di abbattere il coefficiente di tensione superficiale del fluido che lo incontra. Quindi se si usa acqua saponata risulta facile creare lamine di fluido.

Per questo stesso motivo sono possibili le bolle di sapone, sotto condizioni particolari si può creare una condizione di equilibrio stabile tra la pressione interna dell'aria, che tende a far esplodere la bolla, e la forza esercitata dalla bolla per portare il fluido nella condizione del minimo di potenziale, nel caso dell'acqua semplice quest'ultima è molto più forte della pressione del gas, facendo collassare la struttura immediatamente.

Se prendiamo una sferetta d'acciaio sufficientemente piccola questa può essere letteralmente appoggiata sulla superficie del fluido, questa deforma la superficie senza affondare, se la tensione superficiale è sufficientemente alta, la superficie esercita una forza che fa galleggiare la sferetta (Figura 8.9).

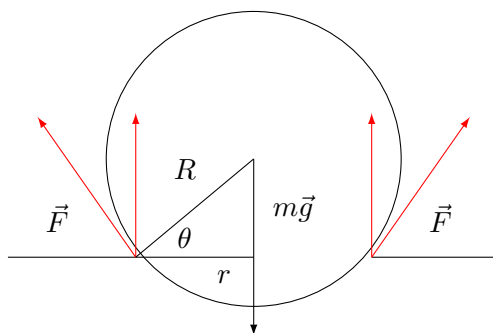


Figura 8.9: Sferetta di acciaio su una superficie di fluido, che deforma la superficie

Il modulo della forza che tende a respingere la sferetta è:

$$F = \gamma L = \gamma 2\pi r = 2\pi\gamma R \cos \theta$$

$$F_{ver} = |F| \cos \theta = 2\pi\gamma R \cos^2 \theta$$

Trascuriamo la forza di archimede¹, le uniche due forze che quindi agiscono sulla sferetta sono la forza peso, e la forza di tensione superficiale: Poiché siamo in equilibrio, si devono eguagliare.

$$\vec{F}_g = Mg = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 g$$

$$2\pi\gamma R \cos^2 \theta = \rho \frac{4}{3} \pi R^3 g$$

$$\cos^2 \theta = \frac{2}{3} \frac{\rho g R^2}{\gamma}$$

Chiaramente questa equazione ammette una soluzione solo se:

$$\frac{2}{3} \frac{\rho g R^2}{\gamma} < 1$$

Tutto questo ovviamente vale nell'approssimazione di $\rho_L \rightarrow 0$.

8.2.8 Capillarità

La capillarità è un fenomeno strettamente legato alla tensione superficiale. Questa volta, anziché studiare la situazione delle molecole a contatto con un gas dobbiamo studiare che succede alle molecole di fluido che sono a contatto sia con un gas che con un solido.

La forza di coesione del fluido è sicuramente maggiore di quella del gas (questa forza crea la tensione superficiale) tuttavia non si può dire lo stesso del solido.

Le forze di attrazione SOLIDO - LIQUIDO possono essere più o meno grande di quelle del liquido. Se il solido attira il liquido più del liquido stesso il liquido *bagna*. Nel caso opposto si dice che il liquido *non bagna*.

Definizione 33 (Angolo di contatto) *Si definisce l'angolo di contatto l'angolo ϕ che forma il fluido con il solido (Figura 8.10). Questa grandezza è una costante che dipende dalle caratteristiche dei tre mezzi: gas, fluido e solido.*

La capillarità dei fluidi ci dice se il contatto con il contenitore è favorevole (e il fluido a contatto con il solido ha un potenziale minore) o sfavorevole (la superficie di contatto avrà un potenziale maggiore).

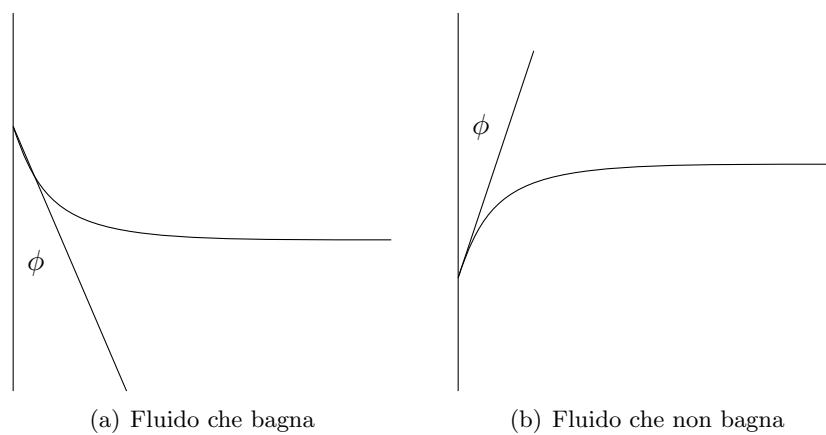


Figura 8.10: Angolo di contatto, a sinistra caso in cui il liquido bagna, a destra il caso in cui il liquido non bagna

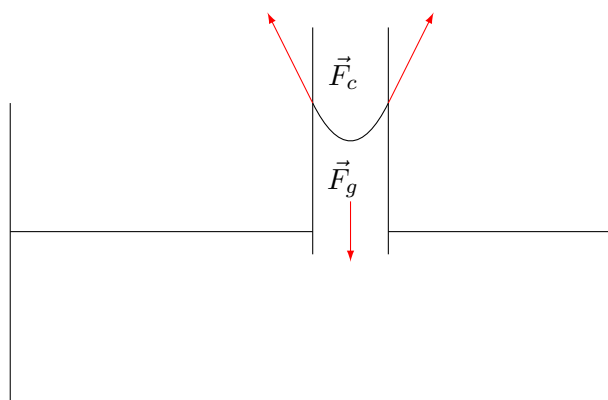


Figura 8.11: Il fluido viene *tirato su* dalle forze di contatto con il solido che controbilanciano la forza peso nel capillare.

In particolare il solido esercita una forza sul fluido che può sollevarlo (Figura 8.11).

La forza \vec{F}_c che solleva il fluido è proprio la forza di tensione superficiale, che tende a minimizzare la superficie di fluido esposta, questa sarà quindi pari alla circonferenza del capillare per il coefficiente γ di tensione superficiale. A noi tuttavia interessa solo la componente lungo l'altezza di questa forza, qui entra in gioco quindi l'angolo di contatto ϕ , infatti:

$$\vec{F}_c = 2\pi r \gamma \cos \phi$$

$$\vec{F}_g = \pi r^2 \rho g h$$

Confrontiamo le espressioni:

$$2\pi r \gamma \cos \phi = \pi r^2 \rho g h$$

$$h = \frac{2\gamma}{\rho r g} \cos \phi$$

Questo fenomeno è detto capillarità, ed è proprio grazie a questo fenomeno che il sangue può diffondersi in tutto il nostro corpo, o che l'acqua può risalire e impregnare una spugna.

8.3 Dinamica dei fluidi

L'approccio più comodo allo studio della dinamica di un fluido è quello *Euleriano*, in cui si immagina il fluido come un campo a cui in ogni posizione è associata una grandezza vettoriale $\vec{v}(\vec{r})$, la velocità.

Introduciamo un po' di dicitura:

1. **Moto stazionario.** Quando $v(\vec{r})$ non dipende dal tempo.
2. **Linea di flusso.** Traiettoria di una singola particella di fluido.
3. **Moto laminare.** Avviene quando le linee di flusso non si incontrano.
4. **Moto turbolento.** Avviene quando le linee di flusso si incrociano.

Il questi appunti saranno trattati esclusivamente i moti di tipo *stazionari-laminari*.

Per studiare questo tipo di dinamica è utile introdurre il concetto di *tubo di flusso*.

¹Per trascurare la forza di archimede, il cui calcolo in questo caso è lungo e tedioso, rimanendo nell'ipotesi in cui la percentuale di volume che affonda sia molto minore del volume totale, e che il ρ_L sia basso.

Definizione 34 (Tubo di flusso) *Si scelga una linea chiusa, e a partire da questa si traccino le linee di flusso di tutti i punti. Il volume contenuto all'interno di queste linee di flusso² è detto **Tubo di flusso***

È opportuno notare che, poiché ci troviamo in regime stazionario, il tubo di flusso ha volume costante, questo implica che tanta materia entra all'interno del tubo, tanta ne deve uscire. È utile quindi definire una nuova grandezza che descrive la quantità di materia che entra o esce da un tubo di flusso in un fissato intervallo di tempo:

Definizione 35 (Portata) *Si definisce la portata il volume di fluido che attraversa una certa superficie in un certo intervallo di tempo:*

$$Q = \frac{dV}{dt}$$

Ricaviamo un'espressione più comoda per esprimere la portata:

$$P = \frac{A dx}{dt} = A \frac{dx}{dt}$$

$$P = A \vec{v}$$

La portata è una caratteristica costante lungo tutto il tubo di flusso.

8.3.1 Teorema di Bernoulli

Sia preso un generico tubo di flusso, sottoposto al campo di forze dei gravi. All'entrata del tubo di flusso ci sarà una certa pressione P_1 , e all'uscita ci sarà un'altra pressione P_2 . Il lavoro fatto per spostare fluido da un'estremità all'altra sarà necessariamente pari alla variazione di energia potenziale e cinetica:

$$L_p = \Delta U + \Delta K$$

Tutta la pressione che agisce sui lati del tubo può essere trascurata, in quanto essa produce una forza perpendicolare allo spostamento del fluido, e quindi non compie lavoro (Figura 8.12).

Ma il lavoro fatto dalla pressione è la forza esercitata sul volumetto per lo spostamento dx che esso compie:

$$L_p = P_1 A_1 dx_1 - P_2 A_2 dx_2$$

$$\Delta U = \rho A_1 dx_1 g z_1 - \rho A_2 dx_2 g z_2$$

$$\Delta K = \frac{1}{2} \rho (A_2 dx_2 v_2^2 - A_1 dx_1 v_1^2)$$

²Ricordiamoci che siamo in regime laminare, quindi le linee di flusso non si incontrano

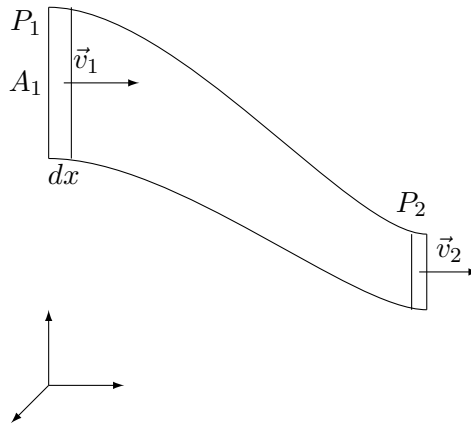


Figura 8.12: Schema di un tubo di flusso

Ora possiamo riscrivere la formula:

$$P_1 A_1 dx_1 - P_2 A_2 dx_2 = \rho A_1 dx_1 g z_1 - \rho A_2 dx_2 g z_2 - \frac{1}{2} \rho A_1 dx_1 v_1^2 + \frac{1}{2} \rho A_2 dx_2 v_2^2$$

Portiamo tutte i termini che si riferiscono alla prima posizione da una parte e gli altri dall'altra e dividiamo tutto per dt

$$P_1 \underbrace{\frac{A_1 dx_1}{dt}}_{\text{Portata}} + \rho \frac{A_1 dx_1}{dt} g z_1 + \frac{1}{2} \rho \frac{A_1 dx_1}{dt} v_1^2 = \dots$$

Il termine a sinistra dell'uguaglianza è identico a quello a destra. Questo implica che questa quantità si mantiene costante in tutto il tubo di flusso. Abbiamo diviso tutto per dt in modo tale da mettere in evidenza la portata, presente a moltiplicare tutti i membri dell'uguaglianza. Poiché anche la portata sappiamo essere una costante durante tutto il tubo di flusso possiamo tranquillamente toglierla e ottenere che:

$$P + \rho g z + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{cost} \quad (8.2)$$

L'equazione (8.2) descrive bene tutte le caratteristiche del tubo di flusso. E tutti i moti laminari rispettano direttamente l'equazione di Bernoulli.

8.3.2 Fluidi Reali

I fluidi ideali, che abbiamo considerato fino a questo punto, hanno le seguenti caratteristiche:

$$\rho = \text{cost} \quad \eta = 0$$

Tuttavia i fluidi ideali non spiegano alcuni fenomeni molto comuni. Basta osservare che all'interno di un tubo qualunque si può verificare la seguente situazione:

$$P_1 A_1 - P_2 A_2 \neq 0$$

Questo implica che la forza totale agente sulla massa di fluido all'interno del fluido è diverso da 0, questo provocherebbe un'accelerazione del fluido, e più è lungo il tubo maggiore la velocità di uscita del fluido. Tuttavia in realtà si osserva il fenomeno opposto, ovvero che aumentando la lunghezza del tubo non solo non aumenta la velocità di uscita, ma tende a diminuire.

Per spiegare questo fenomeno è necessario introdurre una forza, che non potrà che essere una forza di tipo dissipativo.

8.3.3 Attrito viscoso

Sperimentalmente si osserva che spingendo un oggetto sulla superficie di un fluido che bagna la superficie si osserva sperimentalmente che questa produce una velocità. Possiamo modellizzare il fluido come una serie di strati, tutti spessi dh , che scivolano uno sull'altro, se noi imprimiamo una velocità ad uno strato di fluido, quelli contigui saranno spinti da questo strato, e si muoveranno ad una velocità inferiore, così via fino allo strato che è a contatto con il recipiente, il quale conserva la velocità del recipiente, ed è fermo.

Possiamo quindi definire il gradiente delle velocità una funzione che ci indichi la velocità del fluido a determinate quote h differenti. La dipendenza della velocità dalla posizione in questo caso è lineare (vedi Figura 8.13).

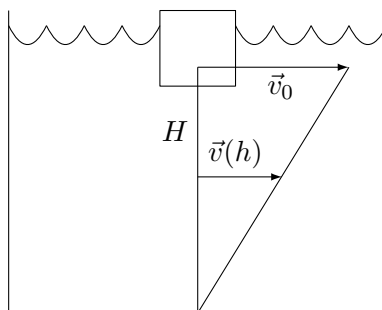


Figura 8.13: Gradiente delle velocità

Ora imponiamo le condizioni appena dette:

$$v(0) = 0 \quad v(H) = v_0$$

Da qui ne ricaviamo che

$$v(h) = \frac{h}{H}v_0$$

A questo punto cerchiamo una relazione che leghi la forza applicata al mattoncino alla velocità v_0 che produce: essa dovrà dipendere dalla velocità

v_0 , dalla profondità (deve mettere in moto tutto il fluido sottostante) e dalla superficie di contatto.

$$v_0 \propto F$$

Sarà inversamente proporzionale alla superficie di contatto:

$$v_0 \propto \frac{F}{S}$$

Se la vasca è profonda l'effetto smorzante del fondo della vasca che tiene immobile l'ultimo strato di fluido sarà meno presente:

$$v_0 \propto \frac{H}{S} F$$

Manca solo una caratteristica univoca del fluido, che identifica quanta resistenza oppongono i vari strati a strisciare l'uno sull'altro, chiamiamo questo termine coefficiente di attrito viscoso η .

Definizione 36 (Coefficiente di attrito viscoso) *Si definisce coefficiente di attrito viscoso η una quantità che indica quanta resistenza oppongono due superfici di fluido a scorrere l'una sull'altra e si indica con la lettera greca η .*

$$\eta = [Pa \cdot s]$$

L'unità di misura può anche essere il Poise, dove:

$$1 \text{ Poise} = 0.1 \text{ Pa} \cdot \dots$$

Da questa definizione possiamo scrivere definitivamente la formula della velocità del fluido

$$v_0 = \frac{H \cdot F}{\eta S}$$

Possiamo tuttavia riscrivere questa formula in altri termini più comodi.

$$\frac{v_0}{H} = \frac{1}{\eta} \frac{F}{S}$$

$$\frac{F}{S} = \eta \frac{v_0}{H}$$

Ricordiamo che \vec{F} è diretta parallelamente alla superficie, questa forza non rappresenta quindi una pressione, ma uno *sforzo di taglio*, definito già nella definizione 31 nella sezione 8.1.3. Scriviamo lo sforzo di taglio (in inglese *stress*) con la lettera greca σ .

$$\sigma = \eta \frac{v_0}{H}$$

Definiamo ora il gradiente di velocità (che in questo caso è costante, poiché tra v e h c'è una dipendenza lineare).

$$\underbrace{\frac{dv}{dh}}_{\text{Gradiente di velocità}} = \frac{v_0}{H}$$

Possiamo riscrivere lo stress in funzione del gradiente di velocità:

$$\sigma = \eta \frac{dv}{dh}$$

Questo ci dice che uno stress produce un gradiente di velocità inversamente proporzionale al coefficiente di attrito viscoso del fluido.

8.3.4 Gradiente di velocità in un tubo

Affrontiamo lo stesso problema di prima, solo che stavolta anziché considerare la vasca, consideriamo un tubo a sezione circolare. In questo caso il gradiente di velocità non è costante, ma dipende dalla posizione del tubo. Prendiamo un cilindro centrale del tubo: la forza che incide su quel cilindro è data dalla differenza di pressione applicata all'inizio e alla fine:

$$F_p = \pi r^2 (P_2 - P_1)$$

Sulla superficie esterna del cilindro gli strati più esterni esercitano uno sforzo di taglio sulla superficie del cilindro che genera una forza che contrasta quella della differenza di pressione:

$$F_\eta = 2\pi r L \eta \frac{dv}{dr}$$

Poiché ci troviamo nell'ipotesi di moto stazionario, le due forze devono equivalersi (ricordiamo che non c'è accelerazione di fluido all'interno del fluido):

$$\begin{aligned} \pi r^2 \Delta P &= 2\pi r L \eta \frac{dv}{dr} \\ \Delta P r dr &= 2L \eta dv \end{aligned}$$

Integriamo:

$$\begin{aligned} \int_0^r \Delta P r dr &= \int_{v(0)}^{v(r)} 2L \eta dv \\ \frac{1}{2} \Delta P r^2 &= 2L \eta [v(r) - v(0)] \end{aligned}$$

Da qui ricaviamo l'espressione della velocità:

$$v(r) = v(0) + \frac{1}{2} \frac{\Delta P}{2L\eta} r^2$$

Ricordiamo ora che alle pareti del tubo la velocità è nulla

$$v(R) = 0$$

Da questa informazione possiamo ricavare il valore di $v(0)$.

$$0 = v(0) + \frac{1}{2} \frac{\Delta P}{2L\eta} R^2$$

$$v(0) = -\frac{1}{2} \frac{\Delta P}{2L\eta} R^2$$

Anche se sembra negativa, ricordiamo che ΔP è definito come $P_2 - P_1$, quindi se ΔP fosse positivo la forza di pressione sarebbe diretta nel verso contrario al tubo, generando una velocità negativa. Per comodità supponiamo di scegliere l'inizio del tubo come quello a cui è applicata la pressione maggiore, e quindi ridefiniamo $\Delta P = P_1 - P_2$ in modo da avere termini positivi.

$$v(r) = \frac{\Delta P}{4L\eta} (R^2 - r^2) \quad (8.3)$$

Come si nota in questa ultima espressione la velocità varia in un tubo ha la forma di una parabola, con un massimo per $r = 0$

8.3.5 Equazione di Poiselle

Proviamo ora a scrivere la portata di un tubo. Per farlo dividiamo il tubo in tante coroncine di spessore dr . La portata di ciascuna di queste coroncine sarà:

$$dQ = \frac{dV}{dt} = \frac{SdL}{dt} = Sv$$

$$dQ = \underbrace{2\pi r dr}_S \cdot v(r)$$

Ora integriamo su tutto il tubo:

$$\int dQ = \int_0^R 2\pi r v(r) dr$$

La velocità la ricaviamo dall'espressione (8.3).

$$Q = 2\pi \int_0^R r \frac{\Delta P}{4L\eta} (R^2 - r^2)$$

$$Q = 2\pi \frac{\Delta P}{4L\eta} \left[\frac{1}{2} R^4 - \frac{1}{4} R^4 \right]$$

$$Q = \pi \frac{\Delta P R^4}{L\eta 8} \quad (8.4)$$

L'equazione 8.4 è detta equazione di *Poiselle*. E ci dice che per $\eta \rightarrow 0$ abbiamo il paradosso di $Q \rightarrow \infty$. Questo è il superamento del paradosso dei fluidi ideali illustrato all'inizio della sezione sulla viscosità.

8.4 Fluidi non Newtoniani

Fino a questo momento abbiamo considerato solo fluidi che presentassero queste caratteristiche:

$$\rho = \text{cost} \quad \eta = \text{cost}$$

La maggior parte dei fluidi in natura seguono bene questo schema, tuttavia esistono molti esempi di fluidi che non si comportano proprio in questo modo. I più interessanti sono sicuramente quelli di cui $\eta \neq \text{cost}$. Questo perché tra i fluidi più leggeri (olio $\rho \sim 10^2$) e quelli più pesanti (mercurio $\rho \sim 10^4$) la densità varia di poco rispetto alla viscosità, che passa dai fluidi meno viscosi (benzina $\eta \sim 10^{-2}$) a quelli più viscosi (stucco $\eta \sim 10^4$), a quelli talmente viscosi da sembrare solidi (vetro $\eta \rightarrow \infty$).

I fluidi in cui η varia al variare dello sforzo di taglio impresso su una superficie vengono detti **Fluidi non newtoniani**.

Esistono due tipi di fluidi non Newtoniani:

1. **Shear thinning**, sono molto comuni e si trovano ovunque, dal dentifricio con cui ci laviamo i denti, al ketchup che si mette sulle patatine, la viscosità di questi fluidi è molto alta, ma si abbassa drasticamente se vi applicate un stress³.
2. **Shear thickening**, sono più rari, e i più divertenti, la loro viscosità inizialmente bassa aumenta all'aumentare dello sforzo di taglio. Il più conosciuto è fatto di acqua e semola di patate, che è un fluido lattiginoso in cui ci si affonda, ma se si cammina energicamente ci si può camminare sopra. Appartengono a questo gruppo anche i fluidi usati nei giubbotti anti-proiettile, infatti sono poco viscosi così da permettere mobilità al soldato, ma se sottoposti a forti stress (come quello generato dalla perforazione di un proiettile) diventano talmente viscosi da solidificarsi, bloccando il proiettile all'interno e evitando che faccia danni.

8.5 Numero di Reynolds

L'ultimo argomento sui fluidi che affronteremo è il numero di Reynolds. Questo importante numero puro ci dà un'indicazione sul tipo di moto che si compie, in particolare per bassi valori del numero di Reynolds il moto sarà laminare, per alti turbolento.

³Il dentifricio ad esempio è talmente viscoso che se capovolto a barattolo aperto non fuoriesce pur essendo un fluido, ma basta applicare una piccola pressione sul tubetto per generare una serie di stress all'interno del fluido che riducono la viscosità permettendo di uscire senza alcuno sforzo

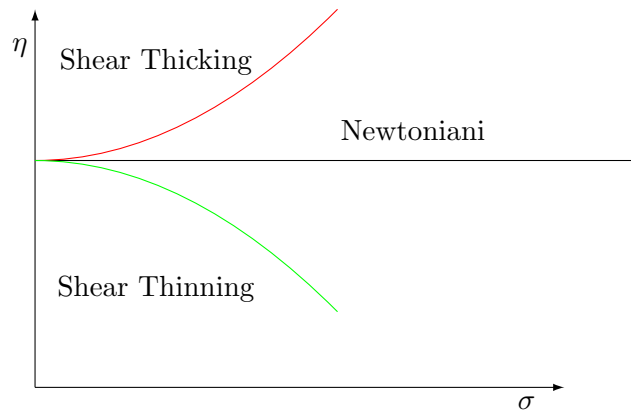


Figura 8.14: Andamento della viscosità nei fluidi non newtoniani

Costruiamo un numero puro:

$$Re = \frac{\rho v R}{\eta}$$

Dove R è la sezione del condotto, le altre quantità sono piuttosto ovvie:

$Re < 1000$	Moto laminare
$1000 < Re < 2000$	Moto probabilmente laminare
$2000 < Re < 10000$	Moto misto ⁴
$Re > 10000$	Moto turbolento

Tabella 8.1: Schema dei valori critici empirici del numero di Reynolds

Capitolo 9

Le trasformazioni di Lorentz (relatività ristretta)

9.1 Scontro con Galileo

Una delle cose più importanti della fisica, è di basarsi su leggi che, come si è soliti dire, sono le stesse in tutti i sistemi di riferimento inerziali fra loro. Questo si traduce, nel caso delle leggi del moto nel fatto che le cause che lo determinano sono le stesse; le conseguenze, ossia le formule del moto, cambiano a seconda del sistema di riferimento che si sceglie, e per due sistemi in moto di traslazione uno rispetto all'altro, si avrà ¹:

$$\begin{cases} x' = x + Vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

Ne segue che le velocità si ottengono derivando entrambi i membri rispetto al tempo, che è lo stesso quindi non crea problemi! Otteniamo:

$$\begin{cases} v'_x = v_x + V \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{cases}$$

Quelle appena scritte prendono il nome di trasformazioni di Galileo e, applicate all'esperienza quotidiana, sembrano proprio funzionare. Tuttavia un postulato della teoria di Maxwell sull'elettromagnetismo, afferma che la velocità della luce, c , è la stessa in tutti i sistemi inerziali! questo è in netto disaccordo con le equazioni appena scritte, quindi o il postulato è sbagliato oppure lo sono le trasformazioni galileiane. Ora nel 1887 Michelson e Morley, con un esperimento basato sull'interferenza, hanno provato che la velocità

¹Per semplicità assumiamo una traslazione lungo un solo asse.

della luce è effettivamente una costante, quindi occorre trovare delle nuove trasformazioni.

9.2 Relatività del tempo

Prima di tutto, l'assunto che c è costante comporta la conseguenza che il tempo non può più essere assoluto infatti, se consideriamo la situazione illustrata nella figura 9.2:

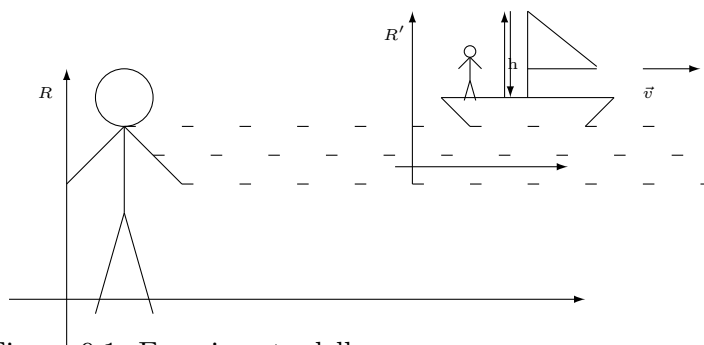


Figura 9.1: Esperimento della nave

Due osservatori, in sistemi di riferimento che si muovono con velocità \vec{v} e $-\vec{v}$ l'uno rispetto all'altro, misurano il tempo che impiega un raggio di luce, fatto partire dal ponte della nave ad arrivare ad un'altezza h e tornare indietro. Il tragitto che fa il raggio di luce per i due osservatori è diverso, infatti l'osservatore solidale con la nave 'vede' il raggio fare un tragitto verticale, mentre per quello a terra, la luce si muove con la nave quindi ha anche una componente orizzontale, schematizzando si ha:

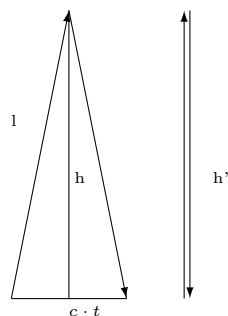


Figura 9.2: Percorso della luce per R, a sinistra, e per R', a destra

Con semplici considerazioni geometriche otteniamo che:

$$l = \sqrt{\left(\frac{v \cdot t}{2}\right)^2 + h^2}$$

ma l è anche metà percorso fatto dalla luce nel tempo t , quindi $t = \frac{2 \cdot l}{c}$, e poichè non essendoci traslazione verticale $h=h'$ possiamo scrivere che $t' = \frac{2h}{c}$, se mettiamo insieme abbiamo:

$$t = \frac{2 \cdot l}{c} = \frac{2}{c} \cdot \sqrt{\left(\frac{v \cdot t}{2}\right)^2 + h^2}$$

Sostituiamo ad h^2 il valore trovato in relazione a t' :

$$t = \frac{2}{c} \cdot \sqrt{\frac{v^2 \cdot t^2}{4} + \frac{c^2 \cdot t'^2}{4}} \rightarrow t^2 = \frac{v^2}{c^2} \cdot t^2 + t'^2$$

In definitiva quindi $t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ Per velocità prossime a quelle della luce, quindi, si assiste ad una dilatazione dei tempi; facendo ragionamenti analoghi li trova per le lunghezze che $l = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cdot l'^2$

9.3 Le trasformazioni relativistiche

Per semplicità di notazione, definiamo $\beta = \frac{v}{c}$. Ora torniamo al nostro problema di trovare nuove trasformazioni, ora visto che le vecchie funzionano molto bene nella descrizione dei fenomeni a basse velocità rispetto a quella della luce, è ragionevole pensare di dover semplicemente modificare le trasformazioni galileiane con un termine correttivo che tenga conto delle velocità in gioco. Quindi possiamo scrivere ³:

$$\begin{cases} x = \gamma \cdot (x' + v \cdot t') \\ x' = \gamma \cdot (x - v \cdot t) \end{cases}$$

Ora, per semplicità consideriamo due sistemi in moto traslatorio, R e R' ; dal primo sistema viene emesso un raggio luminoso nella stessa direzione del moto dell'altro sistema(vedi figura 9.3);

Consideriamo quindi un singolo fotone, nel sistema di riferimento R , lo spazio percorso dal fotone sarà $c \cdot t$, mentre per il sistema di riferimento R' sarà $c \cdot t'$, allora avremo:

$$\begin{cases} ct = (ct' + vt') \cdot \gamma \\ ct' = (ct - vt) \cdot \gamma \end{cases}$$

Portando fuori il tempo nelle due equazioni e moltiplicando la prima per c e la seconda per γ , otteniamo:

²Per velocità piccole rispetto alla luce, ossia per tutte le velocità a cui siamo abituati, il rapporto sotto radice tende a zero e quindi questo coefficiente di tende a uno.

³La seconda equazione è giustificata dalla simmetria dei due sistemi.

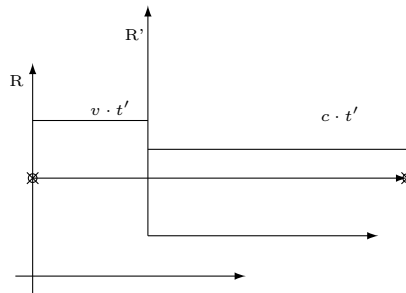


Figura 9.3: Sistemi traslanti

$$\begin{cases} c^2 t = ct'(c+v) \cdot \gamma \\ c\gamma t' = t \cdot (c-v) \cdot \gamma^2 \end{cases}$$

Se moltiplico membro a membro le due equazioni ottengo:

$$\gamma \cdot c^3 \cdot t \cdot t' = c \cdot t \cdot t' \cdot (c^2 - v^2) \cdot \gamma^3 \longrightarrow c^2 = (c^2 - v^2) \cdot \gamma^2$$

Da cui segue che $\gamma = \sqrt{\frac{1}{1-\beta^2}}$. Ora posso riesame le equazioni iniziali per trovare una relazione che legghi i tempi.

$$\begin{cases} x = \gamma \cdot (x' + v \cdot t') \\ x' = \gamma \cdot (x - v \cdot t) \end{cases}$$

Sostituisco la prima nella seconda, ottendo:

$$x' = \gamma(\gamma(x' + vt') - vt) \rightarrow x'(1 - \gamma^2) = \gamma^2 vt' - \gamma vt$$

Isolando t, si ha:

$$t = \gamma \left(t' - \frac{x'(1 - \gamma^2)}{\gamma^2 v} \right)$$

Semplifichiamola un po' notando che:

$$\frac{1 - \gamma^2}{\gamma^2 v} = \frac{1}{v} \left(\frac{1}{\gamma^2} - 1 \right) = -\frac{v}{c^2}$$

Abbiamo infine ottenuto delle nuove trasformazioni, che prendono il nome di trasformazioni di Lorentz.

$$\begin{cases} x = \gamma \cdot (x' + v \cdot t') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma \cdot \left(t' + x' \cdot \frac{v}{c^2} \right) \end{cases}$$

9.4 Metrica di Minkowski e cono di luce

Una conseguenza dell'aver ricavato queste nuove trasformazioni è quella di non poter più considerare le distanze tra punti come invarianti, ossia $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + xz'^2$ che identifica la distanza tra due punti, non è più vera; al suo posto ve ne è un'altra che tiene conto anche delle deformazioni dei tempi, infatti si dimostra che la quantità $x^2 - c \cdot t^2$ si conserva, basta sostituire le espressioni trovate per x e t e si ottiene $x^2 y^2 + z^2 - c \cdot t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c \cdot t'^2$. In pratica si usa una diversa notazione per scrivere questo invariante, ponendo:

$$\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = y \\ x_3 = z \\ x_4 = \pm i \cdot c \cdot t \end{cases}$$

E l'invariante viene rappresentato come $\sum_i x_i^2$.

Lo spazio metrico così creato, ovvero dove vale la relazione:

$$x^2 + y^2 + z^2 - ct^2 = cost$$

Prende nome di metrica di Minkowski, e in geometria analitica questa equazione rappresenta un ipercono in uno spazio a 4 dimensioni. Le implicazioni filosofiche del cosiddetto *cono di luce* esulano dalla trattazione di questi appunti.

9.5 Neanche i neutrini possono correre più veloci di c

Per concludere, vediamo come ricavare la relazione che lega le velocità; a differenza di quanto fatto per le trasformazioni galileiane, qui non si può derivare rispetto al tempo poichè il tempo non è più assoluto. Allora mettiamoci sempre nella situazione semplice di sistemi tralanti lungo x, possiamo dire che:

$$\begin{cases} v_x = \frac{x}{t} \\ v_{x'} = \frac{x'}{t'} \end{cases}$$

e quindi, sostituendo i valori di x e t della prima equazione:

$$\begin{cases} v_x = \frac{x}{t} = \frac{\gamma(x' + vt')}{\gamma(t' + x' \frac{v}{c^2})} \\ \dots \\ \dots \end{cases}$$

Sostituendo $x' = v_{x'}t'$ e semplificando γ e t' , otteniamo:

$$v_x = \frac{v_{x'} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \cdot v_{x'}}$$

Si può procedere nello stesso modo per le componenti in y e z, ottenendo:

$$\begin{cases} v_x = \frac{v_{x'} + v}{1 + \frac{v}{c^2} \cdot v_{x'}} \\ v_y = \frac{v_{y'}}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} \cdot v_{x'}\right)} \\ v_z = \frac{v_{z'}}{\gamma \left(1 + \frac{v}{c^2} \cdot v_{x'}\right)} \end{cases}$$

Quindi dalle ultime equazioni si vede come mentre prima le velocità si sommarono semplicemente ora vi è un fattore correttivo che assicura che le velocità non superino mai quella della luce, infatti v e w sono le due velocità, la loro somma è:

$$V_{tot} = \frac{v + w}{1 + \frac{v \cdot w}{c^2}} = c \cdot \left[\frac{c(v + w)}{c^2 + vw} \right] \leq c$$

Infatti si dimostra che la quantità fra le quadre è sempre minore od uguale a uno.